Nelineární analýza časových řad

Tomáš Novák

WEJČF

January 15, 2019

1. Dynamické systémy
   - Lineární dynamické systémy
   - Nelineární dynamické systémy
     - Body stability, fázový portrét
     - Ljapunovův exponent
     - Chaotická množina, atraktor, podivný atraktor

2. Nelinární analýza časových řad
   - Generování časové řady
   - Zpožděný vektor, Takenův teorém
   - Předpovědi, stacionarita

Dynamické systémy

Soustava veličin $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ závislých na:

- vnější proměnné (většinou na čase)
- počátečních podmínkách
- evolučních zákonech

Rozlišujeme stochastické a deterministické dynamické systémy. Pro mechanické deterministické systémy můžeme evoluční zákony ztotožnit s diferenciálními rovnicemi plynoucí z Hamiltonových rovnic:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= f_1(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\
\dot{\xi}_2 &= f_2(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_n &= f_n(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),
\end{aligned}$$

kde $\xi_k = \xi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dynamické systémy

Diferenciální rovnice jednoznačně určují trajektorii $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ ve fázovém prostoru v závislosti na počátečních podmínkách $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_n(0)$.
Dále budeme uvažovat autonomní soustavu rovnic, tj. nezávisející explicitně na čase.

*Pro diskrétní dynamické systémy (většinou 2-dimenzionální) se zápis zkrátí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n), \end{aligned}$$

se zadanými x_0, y_0.

Lineární dynamické systémy

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n, \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_n &= a_{n1}\xi_1 + \cdots + a_{nn}\xi_n,
\end{aligned}
$$

což je ekvivalentní $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$.
Soustavu vyřešíme nalezením vlastních čísel a vektorů matice $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^{(l)} = \lambda_l \boldsymbol{\eta}^{(l)}.$$

Rovnici splňuje každý výraz tvaru: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t)$.
Odkud obecné řešení (*násobnost vlastních čísel):

$$\boldsymbol{\xi}(t) = c_1 \boldsymbol{\eta}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\eta}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \ldots.$$

Nelineární dynamické systémy

Body stability, fázový portrét

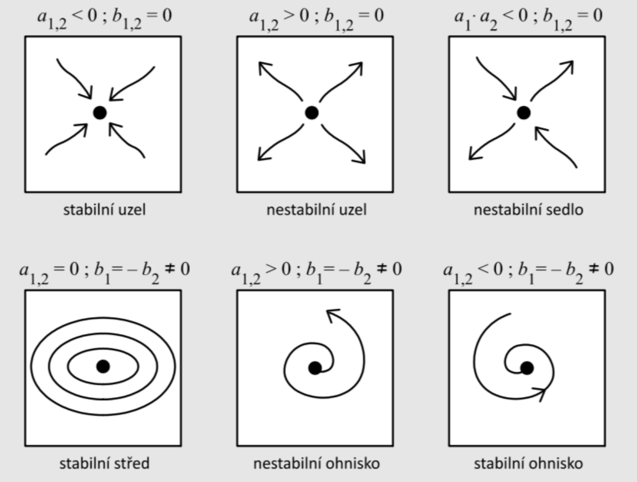
Oproti lineárnímu případu superpozice řešení nemusí být řešením.
Pro odhadnutí fázového portrétu soustavy nalezneme stacionární body $\boldsymbol{\xi}_s$, splňující:

$$f_k(\boldsymbol{\xi}_s) = 0,$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n$.
Poté v těchto bodech vyšetřujeme druh stacionarity. Ke každému bodu nalezneme matici stability $n \times n$, jejíž koeficienty jsou $a_{kl} \equiv \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l}$.

Nelineární dynamické systémy

Pro soustavu dvou diferenciálních rovnic bude mít matice stability rozměr 2×2 a dvě vlastní čísla $\omega_1 = a_1 + ib_1$ a $\omega_2 = a_2 + ib_2$, poté jsou možné následující kombinace:



Nelineární dynamické systémy

Ljapunovův exponent

Zkoumejme jak se vyvíjí dvě trajektorie s blízkými počátečními podmínkami, tj. $\boldsymbol{\xi}(0) \equiv \boldsymbol{\xi}_0$ a $\boldsymbol{\xi}(0) + \boldsymbol{\varepsilon}$.
Platí-li:

$$||\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)|| \sim e^{\lambda t},$$

poté exponent λ nazveme Ljapunovým exponent. Pokud $\lambda > 0$ hovoříme o ljapunovsky nestabilní trajektorii, zdali $\lambda < 0$ jde o ljapunovsky stabilní trajektorii.

Nelineární dynamické systémy

Chaotická množina, atraktor, podivný atraktor

Chaotická množina X

- každá trajektorie v X je ljapunovsky nestabilní
- existuje trajektorie, která X hustě pokryje
- X je invariantní množina

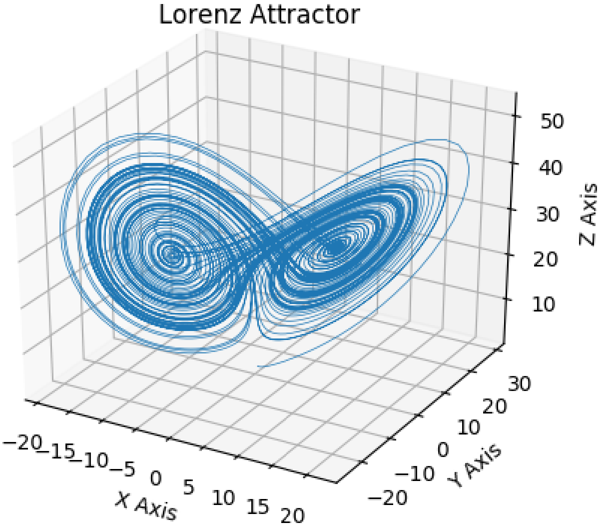
Atraktor A

- trajektorie z okolí A jsou k A s rostoucím časem přitahovány
- existuje trajektorie, která A hustě pokryje
- A je invariantní a uzavřená množina

Podivný atraktor S – chaotický atraktor

Nelineární dynamické systémy

Podivný Lorenzův atraktor



Nelineární dynamické systémy

Podivný Lorenzův atraktor

Lorenzův atraktor je generován diferenciálními rovnicemi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x),\\ \dot{y} &= x(r - z) - y,\\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

kde σ, r a b jsou kladné parametry. Pro jistou množinu parametrů je atraktor chaotický.

Systém se v čase t nachází ve stavovém vektoru $\boldsymbol{\xi}(t)$, časová řada z měření systému je řada reálných hodnot $s_1, s_2, \dots, s_k$, kde

$$s_l = g(\boldsymbol{\xi}(t + l\Delta t)), \quad \text{resp.} \quad s_l = g(x_l, y_l),$$

$l \in \hat{k}$ a Δt je časový rozestup měření. Funkci g nazýváme měřící funkcí. Např. $g(\boldsymbol{\xi}(t)) = \xi_p(t)$, kde $p \in \hat{n}$.

Nechť máme časovou řadu $s_1, s_2, \ldots, s_k$ reálných čísel. Poté lze vytvořit zpožděný vektor definovaný:

$$\boldsymbol{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \ldots, s_{n-\tau}, s_n),$$

kde $\tau = k\Delta t$ je tzv. zpoždění (time lag), Δt je časový rozestup sousedních členů časové řady a m je dimenze vektoru.

Takenův teorém praví, že za poměrně obecných předpokladů(m je větší nebo rovno dimenzi dynamického systému) je vektor $\boldsymbol{s_n}$ ekvivalentní stavovému vektoru $\boldsymbol{\xi}(n\Delta t)$.

Nelineární analýza časových řad

Výběr parametrů m a τ

Při fixní volbě m jsou zpožděné vektory ekvivalentní pro různé volby τ pouze tehdy, pokud jsou data bez příměsi šumu. Dobrý odhad parametru τ je čtvrtina periody, nebo první nula v autokorelaci:

$$c_\tau = \frac{1}{\sigma^2}\langle(s_n - \langle s\rangle)(s_{n-\tau} - \langle s\rangle)\rangle = \frac{\langle s_n s_{n-\tau}\rangle - \langle s\rangle^2}{\sigma^2},$$

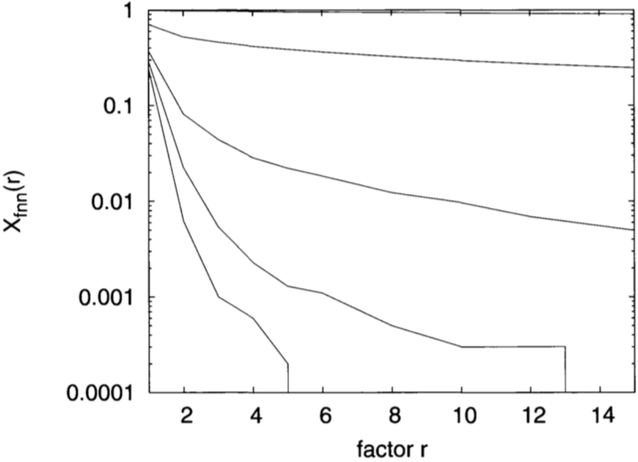
kde $\sigma = \langle(s - \langle s\rangle)^2\rangle$ je rozptyl časové řady.
Pro zjištění dostatečné volby m je třeba sestavit statistiku:

$$X_{fnn}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{N-m-1} \Theta\left(\frac{|\mathbf{s}_n^{(m+1)} - \mathbf{s}_{k(n)}^{(m+1)}|}{|\mathbf{s}_n^{(m)} - \mathbf{s}_{k(n)}^{(m)}|} - r\right)\Theta\left(\frac{\sigma}{r} - |\mathbf{s}_n^{(m)} - \mathbf{s}_{k(n)}^{(m)}|\right)}{\sum_{n=1}^{N-m-1} \Theta\left(\frac{\sigma}{r} - |\mathbf{s}_n^{(m)} - \mathbf{s}_{k(n)}^{(m)}|\right)},$$

Nelineární analýza časových řad

Výběr parametrů m a τ

kde r je faktor a $k(n)$ je index zpožděného vektoru, který splňuje $|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{k(n)}|$ =min., používáme maximální normu.



Nelineární analýza časových řad

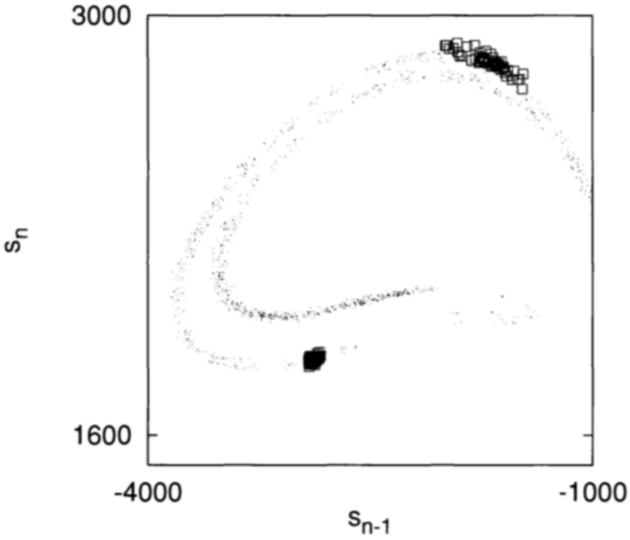
Předpovědi

Nechť máme vektory $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_N \in \mathbb{R}^m$. Chceme-li předpovědět člen časové řady Δn do budoucnosti, utvoříme okolí $U_\varepsilon(\boldsymbol{s}_N)$ vektoru $\boldsymbol{s}_N$ závislém na parametru ε. Vezmeme všechny vektory z okolí $\boldsymbol{s}_n \in U_\varepsilon(\boldsymbol{s}_N)$ a koukneme se, jaký člen následuje v individuálních případech. Předpověď je poté:

$$\hat{s}_{N+\Delta n} = \frac{1}{|U_\varepsilon(\boldsymbol{s}_N)|} \sum_{\boldsymbol{s}_n \in U_\varepsilon(\boldsymbol{s}_N)} s_{n+\Delta n}.$$

Nelineární analýza časových řad

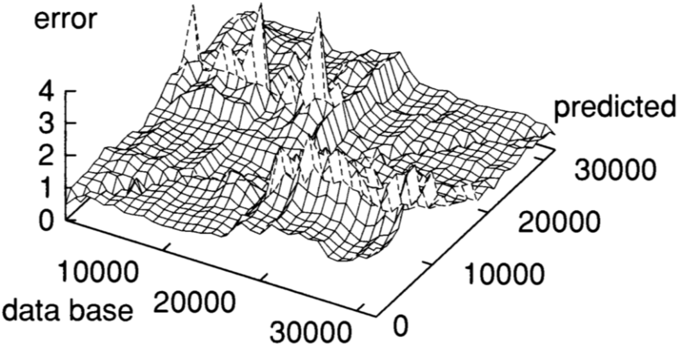
Předpovědi, stroboskopický náhled



Nelineární analýza časových řad

Předpovědi, ověření stacionarity řady

Rozdělíme části časové řady, pomocí jedné z části předpovídáme výsledky z jiných. Sestavíme graf rozdílu pomocí RMS předpovědí a reálných dat a sledujeme, jak moc se lyší předpověd od skutečnosti. Tím ověřujeme stacionaritu řady.



Literatura

[1] Holger Kantz, Thomas Schreiber. Nonlinear time series analysis. 359 str. Cambridge University press

[2] Petr Kulhánek. Vybrané kapitoly z teoretické fyziky. 417 str.