Variační Bayesova metoda pro sekvence snímků z magnetické rezonance

Antonie Brožová
Školitel: Doc. Ing. Václav Šmídl, PhD.

20. června 2019

Osnova

Osnova

Variační Bayesova metoda

Osnova

Variační Bayesova metoda

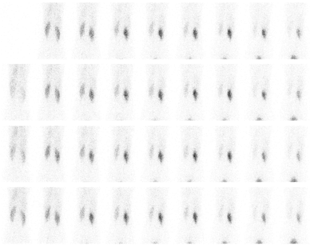
Konvoluční model

Osnova

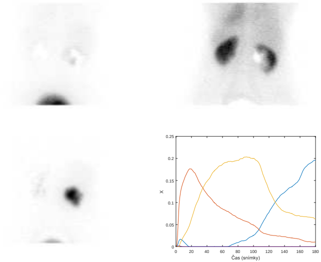
Variační Bayesova metoda

Konvoluční model

Konvoluční model s hladkými jádry



Obrázek: Data z Database of dynamic renal scintigraphy - www.dynamicrenalstudy.org.



Pravděpodobnostní model

- Data $\boldsymbol{D}$, vícerozměrný parametr $\boldsymbol{\theta}$
- Model je dán hustotou pravděpodobnosti

$$f(\boldsymbol{D}|\boldsymbol{\theta})$$

- Bayesova věta

$$f(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{D}) \propto f(\boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta})$$

- Cíl: získat aposteriorní rozdělení jednotlivých parametrů

$$f(\theta_i|\boldsymbol{D})$$

Aproximace

- Aproximace blízká reálné hustotě
  - Kullback-Leiblerova divergence aproximované hustoty $\hat{f}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})$ od reálné $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})$

$$KL\left(\hat{f}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D}) \parallel f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})\right) = \mathbb{E}_{\hat{f}(\theta|D)}\left[\ln \frac{\hat{f}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})}{f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})}\right].$$

- Prostor nezávislých podmíněných hustot pravděpodobnosti

$$\mathbb{F} = \{f(\theta_i, \theta_j|\boldsymbol{D}) : f(\theta_i, \theta_j|\boldsymbol{D}) = f(\theta_i|\boldsymbol{D})f(\theta_j|\boldsymbol{D})\}.$$

(Šmídl, Quinn, 2006)

Variační Bayesova metoda

Nechť je $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})$ aposteriorní hustotou pravděpodobnosti vícerozměrné proměnné $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)^T$. Nechť dále $\hat{f}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D}) \in \mathbb{F}$ označuje aproximovanou hustotu nezávislých proměnných $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$. Pak je minima Kullback-Leiblerovy divergence hustoty $\hat{f}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})$ od $f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})$ dosaženo pro

$$\tilde{f}(\theta_i|\boldsymbol{D}) \propto \exp\left[\mathbb{E}_{\tilde{f}(\boldsymbol{\theta}_{\setminus i}|\boldsymbol{D})}\left[\ln f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{D})\right]\right], \qquad i = 1, \ldots, n,$$

kde $\boldsymbol{\theta}_{\setminus i}$ představuje vektor $\boldsymbol{\theta}$ bez jeho i-té složky. (Šmídl, Quinn, 2006)

- IVB algoritmus
- EM algoritmus

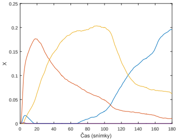
FAMIS

Model

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{E},$$

kde $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p \times r}$, $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Konvoluční model

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}_k, \qquad \text{kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{W},$$

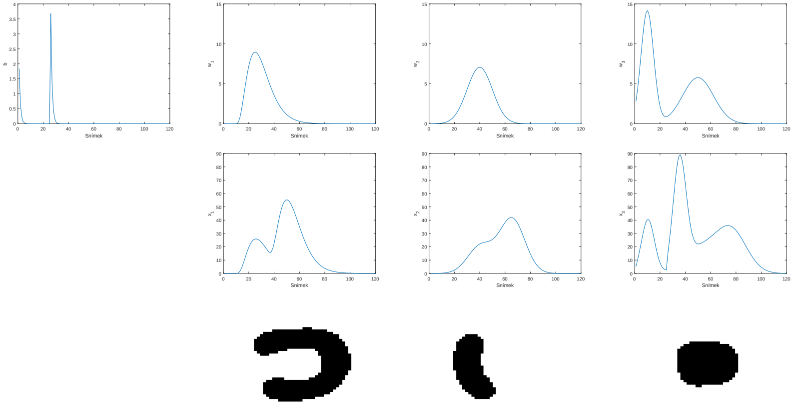
Rozdělení

- Apriorní rozdělení

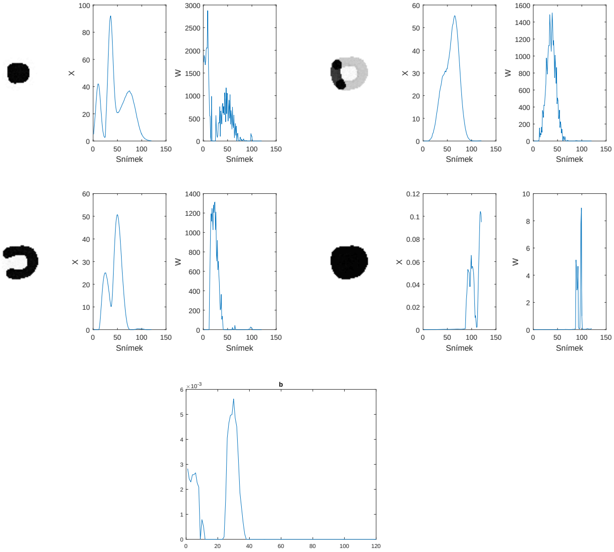
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} \,|\, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{B}, \omega &\sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{W}^T, \omega^{-1}\boldsymbol{I}_p \otimes \boldsymbol{I}_n\right), \\
a_{i,k} \,|\, \xi_{i,k} &\sim t\mathcal{N}\left(0, \xi_{i,k}^{-1}, \langle 0, 1\rangle\right), && \forall i \in \hat{p}, \forall k \in \hat{r}, \\
\xi_{i,k} &\sim \mathcal{G}\left(\Phi_{i,k,0}, \psi_{i,k,0}\right), && \forall i \in \hat{p}, \forall k \in \hat{r}, \\
w_{j,k} \,|\, v_{j,k} &\sim t\mathcal{N}\left(0, v_{j,k}^{-1}, \mathbb{R}_0^+\right), && \forall j \in \hat{n}, \forall k \in \hat{r}, \\
v_{j,k} &\sim \mathcal{G}\left(\alpha_{j,k,0}, \beta_{j,k,0}\right), \forall j \in \hat{n}, && \forall k \in \hat{r}, \\
\omega &\sim \mathcal{G}\left(\rho_0, \eta_0\right), \\
\boldsymbol{b} &\sim \mathcal{U}\left(\langle 0, \lambda\rangle^n\right).
\end{aligned}
$$

- Aposteriorní rozdělení
  - z konjugovanosti stejná, liší se pouze parametry
  - $\boldsymbol{b}$ odhadována bodově $\rightarrow$ aposteriorní rozdělení jako Diracova δ-funkce

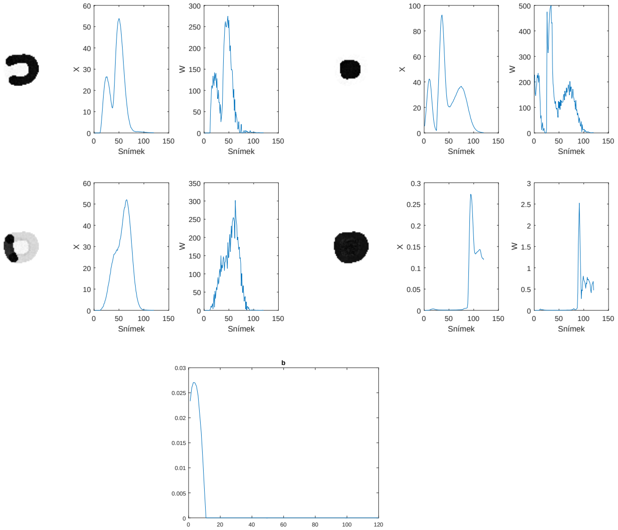
Syntetická data



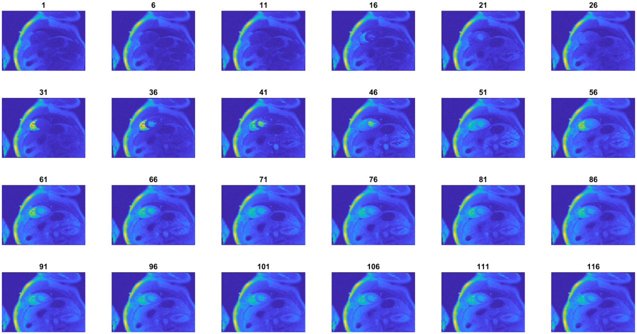
Vstupní funkce ze dvou exponenciál



Vstupní funkce z jedné exponenciály

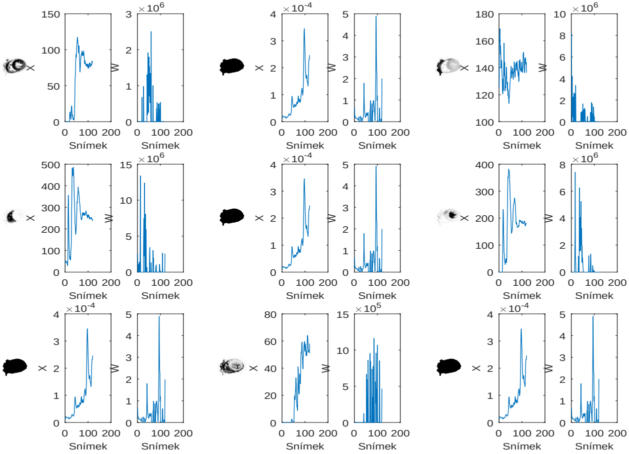


Data z magnetické rezonance srdce

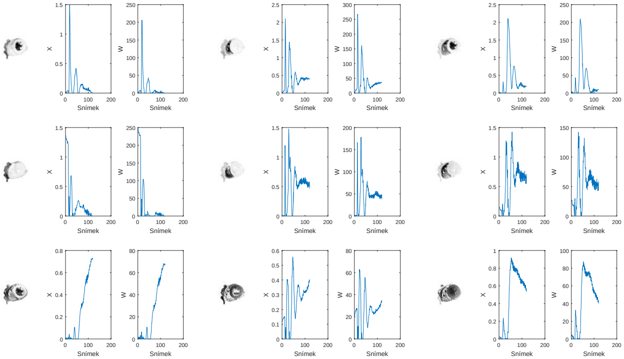


Obrázek: Data poskytnutá Institutem klinické a experimentální medicíny

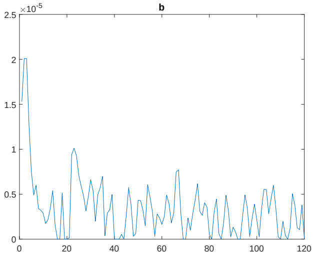
Odhad *b* bez aproximace

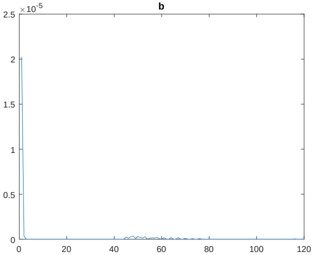


Odhad *b* s aproximací



Vstupní funkce





Předpoklad hladkosti jader

$$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}, \operatorname{diag}(\boldsymbol{v}_k)^{-1}\right),$$

kde

$$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{w}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{1,k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{2,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n-1,k} & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{w}_k = \begin{pmatrix} w_{1,k} \\ l_{1,k} w_{1,k} + w_{2,k} \\ l_{2,k} w_{2,k} + w_{3,k} \\ \vdots \\ l_{n-1,k} w_{n-1,k} + w_{n,k} \end{pmatrix}.$$

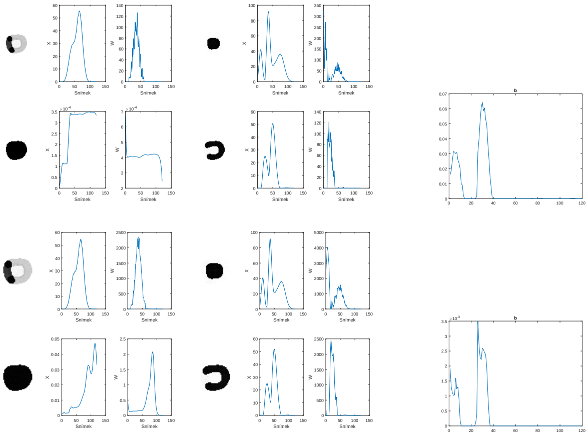
takže nové apriorní rozdělení $\boldsymbol{w}_k$ bude

$$\boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}_n, \left(\boldsymbol{L}_k \operatorname{diag} \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{L}_k^T\right)^{-1}\right),$$

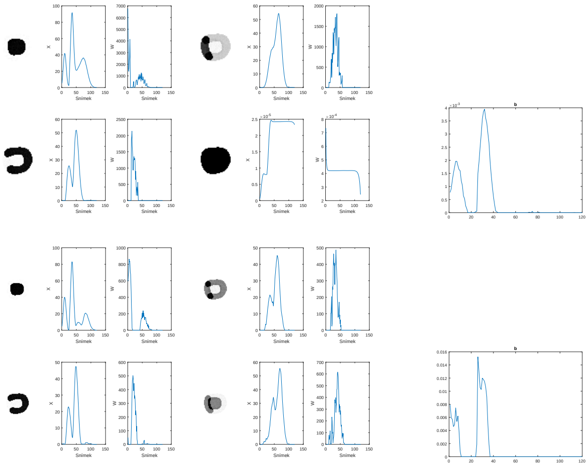
$$l_{t,k} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{l_{t,k},0}, \phi_{t,k}^{-1}\right), \qquad \forall t \in \widehat{n-1}, \forall k \in \hat{r},$$

$$\phi_{t,k} \sim \mathcal{G}\left(\gamma_{t,k,0}, \nu_{t,k,0}\right), \qquad \forall t \in \widehat{n-1}, \forall k \in \hat{r}.$$

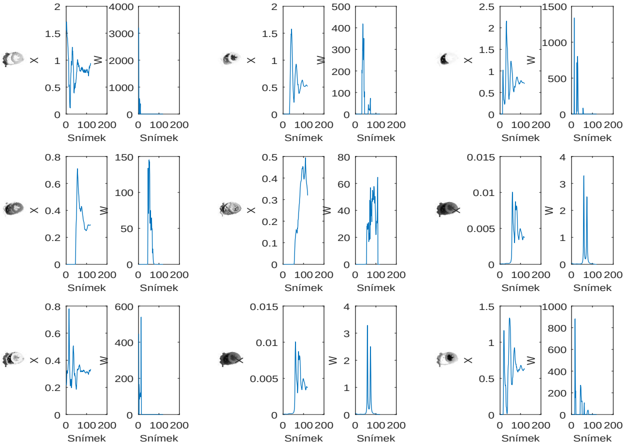
Slabší požadavek na hladkost



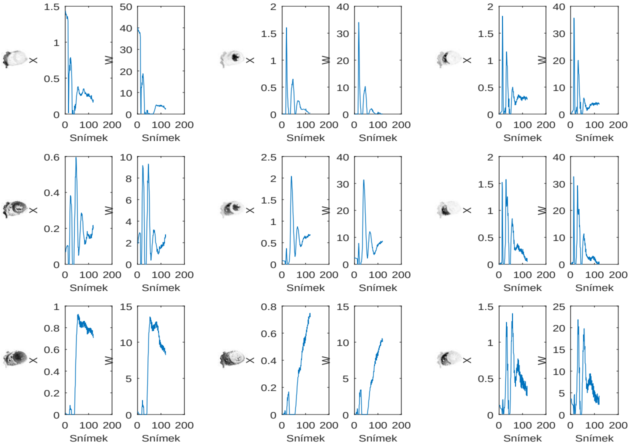
Slabší požadavek na hladkost, nuly v počátečních hodnotách konvolučních jader



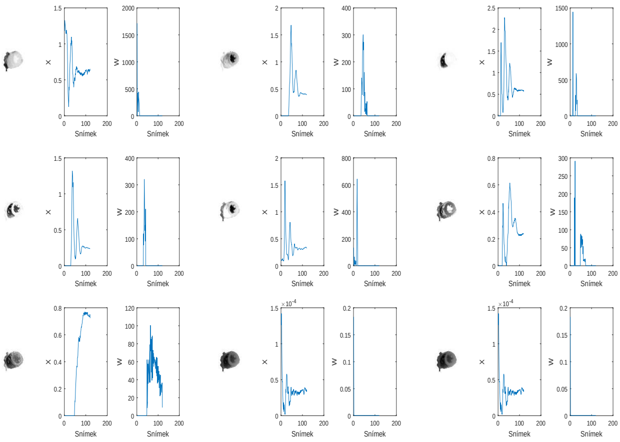
Odhad *b* bez aproximace



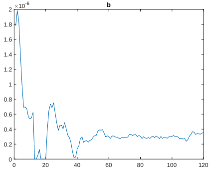
Odhad *b* s aproximací

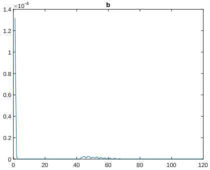


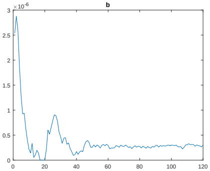
Odhad *b* bez aproximace se slabším požadavkem na hladkost



Vstupní funkce







Závěr

- Byl navržen konvoluční model k rozkladu sekvence snímků z magnetické rezonance srdce
- První model odhadoval konvoluční jádra místy skoro jako sekvence pulsů, proto byl navržen nový model s předpokladem hladkosti jader
- Díky novému předpokladu se odhad zlepšil jak u syntetických, tak u reálných dat

ŠMÍDL, Václav a Anthony QUINN, 2006. *The Variational Bayes Method in Signal Processing*. Berlin Heidelberg: Springer. ISBN 978-3-540-28820-6.