

Nelineární dynamika

Tomáš Novák

FJFI ČVUT v Praze

January 17, 2020

Obsah

- 1 Přejchod mezi diskretním a spojitým dynamickým systémem
- 2 Diskrétní dynamické systémy
- 3 Spojité dynamické systémy
 - Jednoznačnost řešení
 - Autonomní systémy a stacionární bod
 - Linearizace dynamického systému
 - Deterministický chaos
 - KAM teorém

Dynamické systémy

Sledují vývoj určitých veličin v diskrétních nebo spojitých krocích, dle zadaných pravidel

- Diskrétní dynamické systémy – rekurentně zadané posloupnosti, většinou bez závislosti na čase, např. Logistická mapa $N_{k+1} = \beta N_k(1 - N_k)$, kde $\beta \in (0, 4)$ a $N_0 \in (0, 1)$.
- Spojité dynamické systémy – ve tvaru diferenciálních rovnic, např. $\dot{x} = f(x, t)$, odkud $x(t_0 + t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau$

Přechod Spojité \rightarrow Diskrétní:

$$x_{n+1} = x((n + 1)h) = x(nh) + \int_{nh}^{(n+1)h} f(x, t) dt, \quad (1)$$

kde $h > 0, n \in \mathbb{Z}$. Však nutnost výpočtu integrálu, což nemusí být analyticky vždy možné. Prakticky se používá Rungeova-Kuttova metoda.

Aproximace:

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f(x, t) dt \simeq \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = hf(x_k, nh) \rightarrow k_2 = hf(x_k + k_1/2, nh + h/2)$$
$$\rightarrow k_3 = hf(x_k + k_2/2, nh + h/2)$$
$$\rightarrow k_4 = hf(x_k + k_3, nh + h).$$

Přechod Diskrétní \rightarrow Spojité není obecně vždy možný, pro $x_{k+1} = g(x_k)$ lze odhadnout:

$$\dot{x} \simeq x_{k+1} - x_k = g(x_k) - g(x_{k-1}) \simeq f(x).$$

Diskrétní dynamické systémy jsou obecnější než spojité.

Diskrétní dynamické systémy a chaos

- Stacionární bod x^s systému $x_{k+1} = g(x_k)$ splňuje:

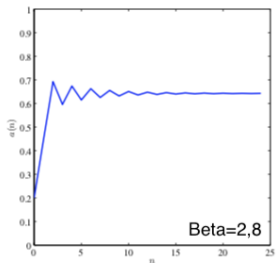
$$x^s = g(x^s). \quad (2)$$

- Pro Periodický bod x^p s periodou n platí:

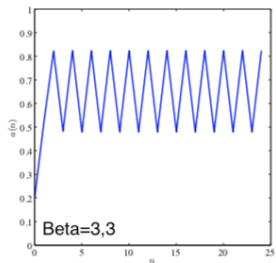
$$x^p = \underbrace{(g \circ g \circ \dots \circ g)}_n(x^p). \quad (3)$$

- Bifurkace – nechť máme systém $x_{k+1} = g(x_k, \mu)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr. Řekneme, že v hodnotě μ_B nastává bifurkace, pokud se "kvalitativně" nebo topologicky změní množina řešení systému.

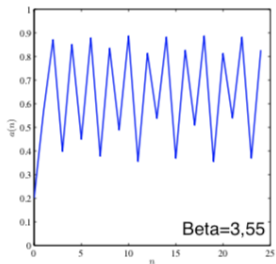
Logistická mapa $x_{k+1} = \beta x_k(1 - x_k)$, kde $\beta \in (0, 4)$ a $x_0 \in (0, 1)$ má "kvalitativně" rozdílné chování pro různé hodnoty parametru β , zde různý počet limitních cyklů.



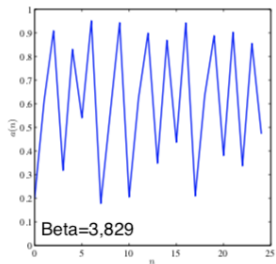
(a)



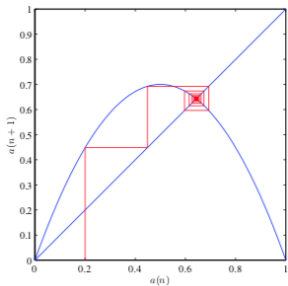
(b)



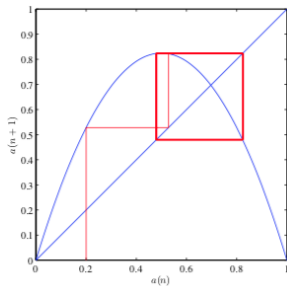
(c)



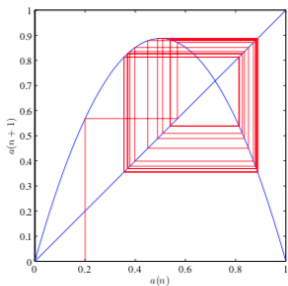
(d)



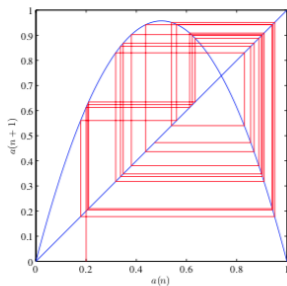
(a)



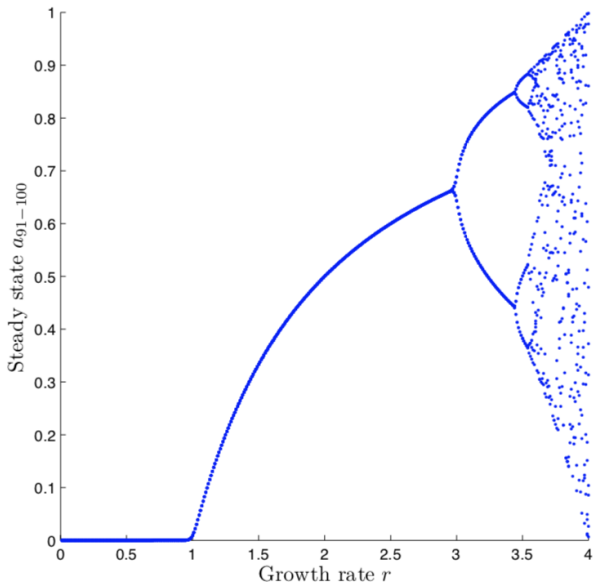
(b)



(c)



(d)



Spojité dynamické systémy

Uvažujeme zejména vektorové diferenciální rovnice tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je čas a $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce v \mathbf{x} i t a prostor $x \in \mathbb{R}^n$ nazýváme fázovým prostorem.

Hledáme spojitě diferencovatelnou vekt. funkci $\mathbf{x}(t)$, jejíž derivace splňuje rovnici (4).

Obecně lze převést skalární rovnici n -tého řádu na soustavu $n + 1$ dif. rovnic prvního řádu tvaru (4):

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

kde $x_1 = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, x_2 = \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}, \dots, x_{n+1} = y$.

Skalární diferenciální rovnice druhého řádu:

$$\ddot{y} = g(y, t),$$

lze převést na soustavu tvaru (4) pomocí substituce $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$, odkud

$$\dot{x}_1 = g(x_2, t),$$

$$\dot{x}_2 = x_1.$$

Např. skalární rovnice druhého řádu pro nelineární harmonický oscilátor

$\ddot{y} = -y + y^2 - y^3$, při použití substituce $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_2^2 - x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1.$$

Jednoznačnost řešení a řešení počáteční úlohy

Je-li vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ spojitě diferencovatelná, poté splňuje Lipschitzovu podmínku:

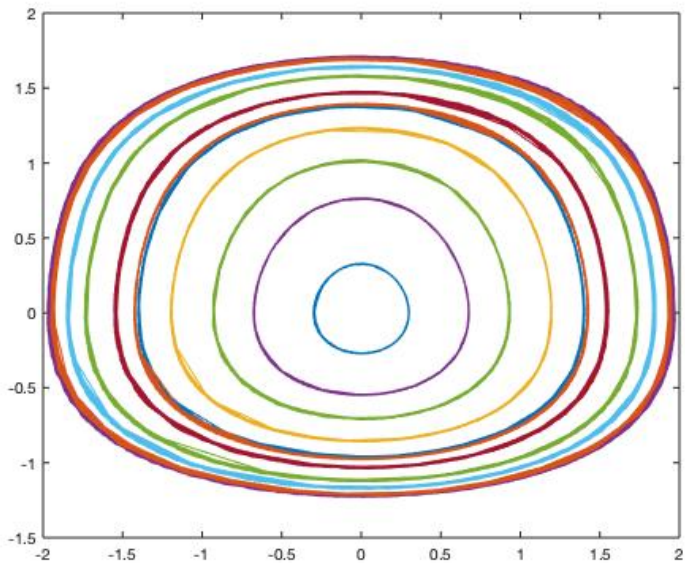
$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad (5)$$

na $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$, kde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D \subset \mathbb{R}^n$ a L je Lipschitzova konstanta. Poté úloha s počátečními podmínkami:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6)$$

má pouze jedno unikátní řešení $\mathbf{x}(t)$ ozn. $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, které nazýváme orbitou nebo fázovou trajektorií dané pp.

Definujme $F = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) | \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n\}$ jako fázový portrét soustavy (4).



Autonomní systémy a stacionární bod

Studujme nyní podtřídu spojitéch dynamických systému, které mají tvar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

a nazýváme je autonomní.

Nalezneme-li bod \mathbf{x}_s splňující

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s), \quad (8)$$

pak \mathbf{x}_s nazveme stacionárním bodem a nutně platí pro úlohu s počáteční podmínkou:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_s \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s. \quad (9)$$

Otázkou je, jak se chová dynamický systém v okolí stacionárního bodu.

Linearizace dynamického systému

Předpokládáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ má Taylorův rozvoj ve stacionárním bodě \mathbf{x}_s a lze tedy zapsat ve formě:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}_s + \mathbf{dx}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + \mathbb{A}\mathbf{dx} + \dots \\ &= \mathbf{0} + \mathbb{A}\mathbf{dx} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_s + \mathbf{dx}),\end{aligned}$$

kde vektorová funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ splňuje podmínku

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|} = 0.$$

Poté lze chování vekt. funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na blízkém okolí bodu \mathbf{x}_s aproximovat:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s + \mathbf{dx}) \simeq \mathbb{A}\mathbf{dx}.$$

Lineární dynamický systém

Lineární dynamický systém lze zapsat jako:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (10)$$

kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární matice. Nalezením vlastních čísel λ_l a příslušných vlastních vektorů $\boldsymbol{\eta}^l$ matice \mathbb{A} splňující:

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\eta}^l = \lambda_l\boldsymbol{\eta}^l, \quad (11)$$

lze rozepsáním $\mathbf{x}(t) = \sum_{l=1}^n c_l \boldsymbol{\eta}^l(t)$ získat:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \sum_{l=1}^n c_l \dot{\boldsymbol{\eta}}^l = \mathbb{A} \cdot \sum_{l=1}^n c_l \boldsymbol{\eta}^l = \sum_{l=1}^n c_l \lambda_l \boldsymbol{\eta}^l, \quad (12)$$

protože jsou vlastní vektory navzájem kolmé, dostáváme n rovnic:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^l = \lambda_l \boldsymbol{\eta}^l \implies \boldsymbol{\eta}^l(t) = e^{\lambda_l(t-t_0)} \boldsymbol{\eta}^l(t_0). \quad (13)$$

Lineární dynamický systém

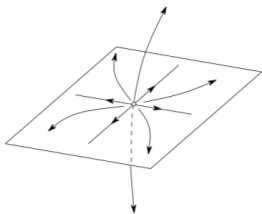
Odkud výsledek úlohy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{l=1}^n c_l \boldsymbol{\eta}^l(t) = \sum_{l=1}^n c_l e^{\lambda_l(t-t_0)} \boldsymbol{\eta}^l(t_0). \quad (14)$$

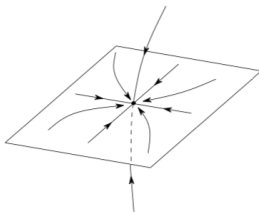
Analýzou vlastních čísel $\lambda_l \in \mathbb{C}$ můžeme určit, jak se chová řešení v daných směrech $\boldsymbol{\eta}^l$. Stacionární bod úlohy je pouze $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$.

Nechť $\mathbf{x}(t_0) = c_l \boldsymbol{\eta}^l \neq \mathbf{0}$, poté $\mathbf{x}(t) = c_l \boldsymbol{\eta}^l(t) = c_l e^{\lambda_l(t-t_0)} \boldsymbol{\eta}^l$, pokud pro $\lambda_l = a_l + ib_l \in \mathbb{C}$

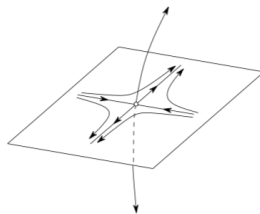
- $a_l \leq 0$ a $b_l = 0$ pak je v daném směru $\boldsymbol{\eta}^l$ bod $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ stabilní
- $a_l > 0$ a $b_l = 0$ pak je v daném směru $\boldsymbol{\eta}^l$ bod $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ nestabilní
- $a_l = 0$ a $b_l \neq 0$ pak v daném směru $\boldsymbol{\eta}^l$ řešení $\mathbf{x}(t)$ osciluje



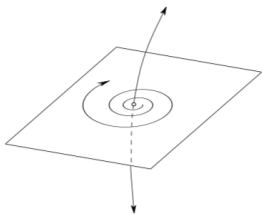
(a) Nestabilní uzel



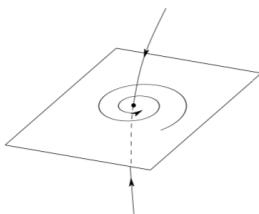
(b) Stabilní uzel



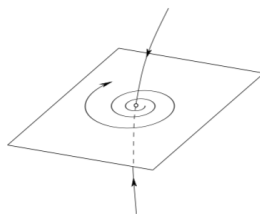
(c) Sedlo (nestabilní)



(d) Nestabilní uzel-ohnisko



(e) Stabilní uzel-ohnisko



(f) Sedlo-ohnisko

Deterministický chaos

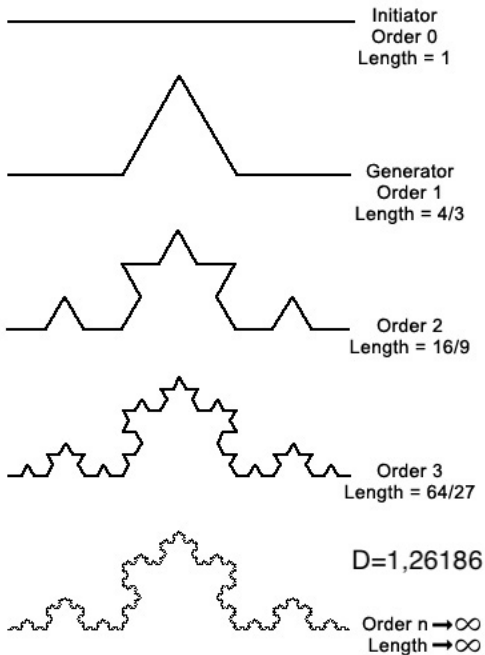
Ve spojitém dynamickém systému s více jak třemi stupni volnosti může vzniknout jev zvaný deterministický chaos, který se vyznačuje:

- velkou citlivostí na pp,
- exponenciální rozbíhavostí blízkých orbit,
- uvěznění orbit na množině zvaném podivný atraktor,
- neintegrabilita pohybových rovnic.

Chaotický atraktor \mathcal{A} je množina ve fázovém prostoru splňující:

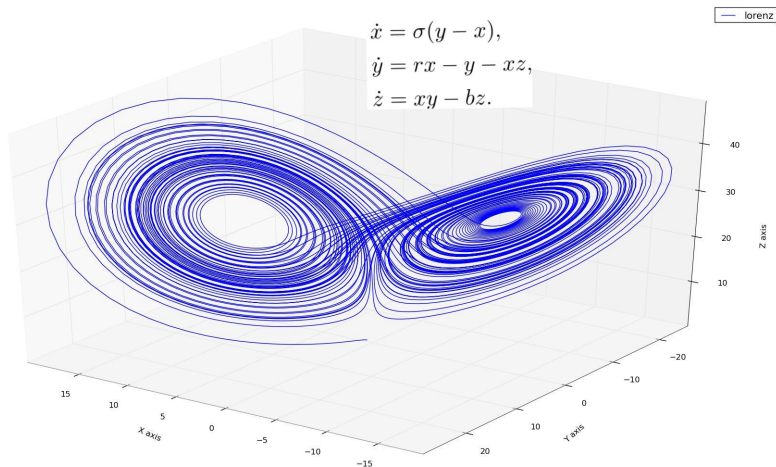
- $\exists U_{\mathcal{A}}$, takže $\forall \mathbf{x}_0 \in U_{\mathcal{A}} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \mathcal{A}) = 0$,
- existuje trajektorie, která \mathcal{A} hustě pokryje,
- \mathcal{A} je invariantní.

Ukazuje se, že podivné atraktory jsou fraktály, které nemají celočíselnou dimenzi. Ta se určuje podle škálování $N = \nu^{-D}$.



Lorenzův systém

Chaotický Lorenzův dynamický systém s parametry σ, r, b a fraktální dimenzí $D = 2,06 \pm 0,01$:



Hamiltonovské systémy

Existuje skalární funkce $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ taková, že pohybové rovnice systému lze získat $\forall i \in \hat{n}$:

$$p_i = -\frac{dH}{dq_i}; \quad q_i = \frac{dH}{dp_i}, \quad (15)$$

funkce H představuje první integrál pohybu.

Platí Liouvilleův teorém – objem ve fázovém prostoru se zachovává \implies v Hamiltonovských systémech existuje pouze sedlo nebo ohnisko a jejich kombinace.

Nelinearitu lze přidávat do systému jako poruchu pomocí parametru ε :

$$H = H_{lin} + \varepsilon H_{por} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

KAM teorém

Například porušený harmonický oscilátor:

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \varepsilon(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3)$$

$$\rightarrow \dot{p}_1 = -q_1 - \varepsilon 2q_1 q_2$$

$$\dot{q}_1 = p_1$$

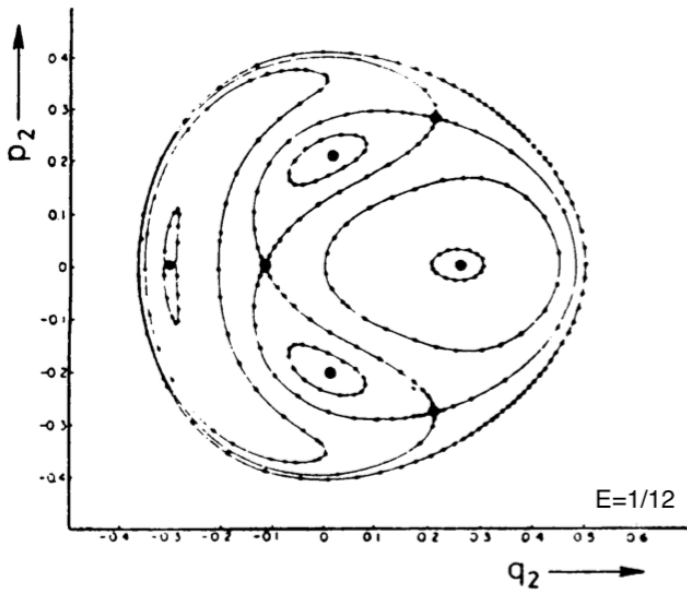
$$\dot{p}_2 = -q_2 + \varepsilon(q_2^2 - q_1^2)$$

$$\dot{q}_2 = p_2$$

KAM teorém: Řeší změnu fázového portréту při přidání nelineární poruchy. Přežijou určité části tóru, ty s dostatečně iracionálním podílem frekvencí (kvaziperiodické orbity). Ostatní se změň na invariantní Cantorovo diskontinuum.

První použití na nebeskou dynamiku tří těles, později na celou sluneční soustavu.

Poincarého řez

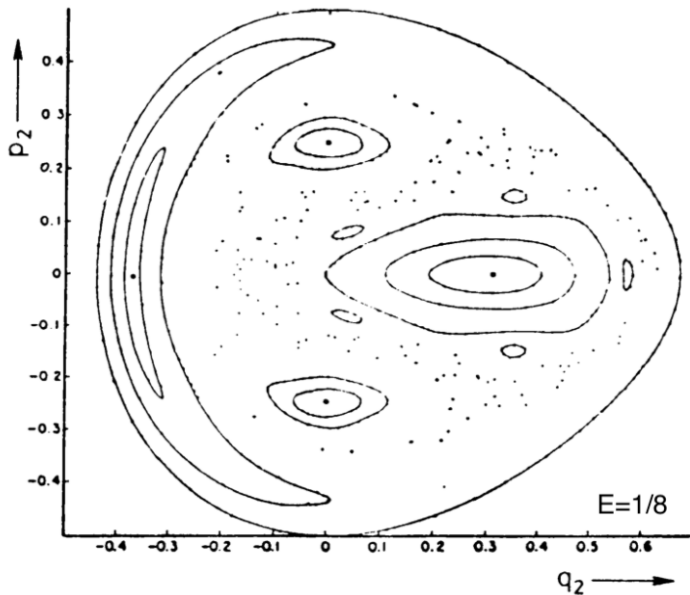


Cantorovo diskontinuum

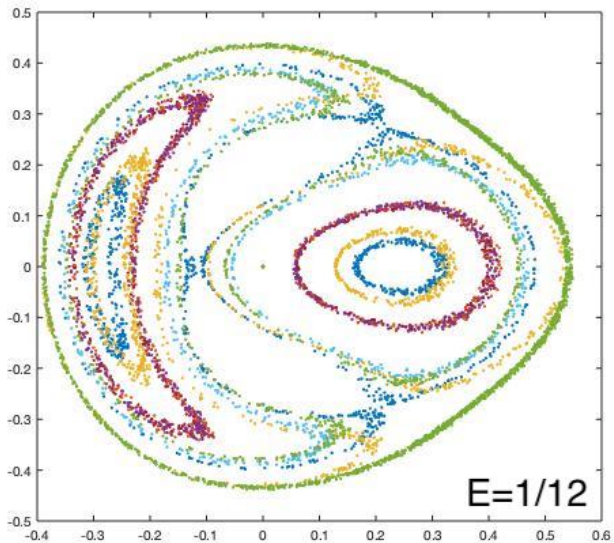
Iterací získáváme \mathcal{C}_i , kde Cantorovo diskontinuum je množina $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$ s dimenzí $D = 0,6309$.



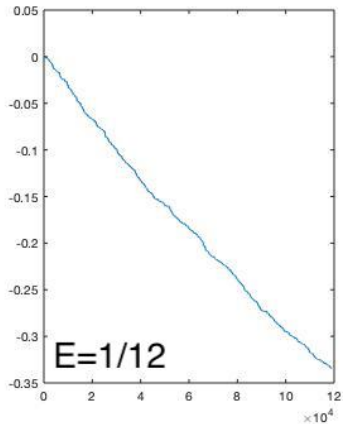
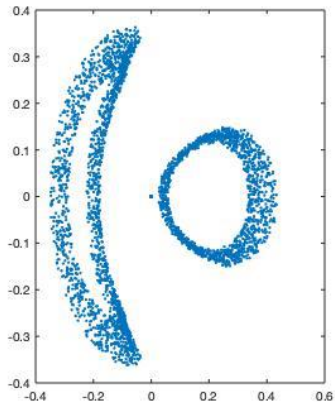
Poincarého řez



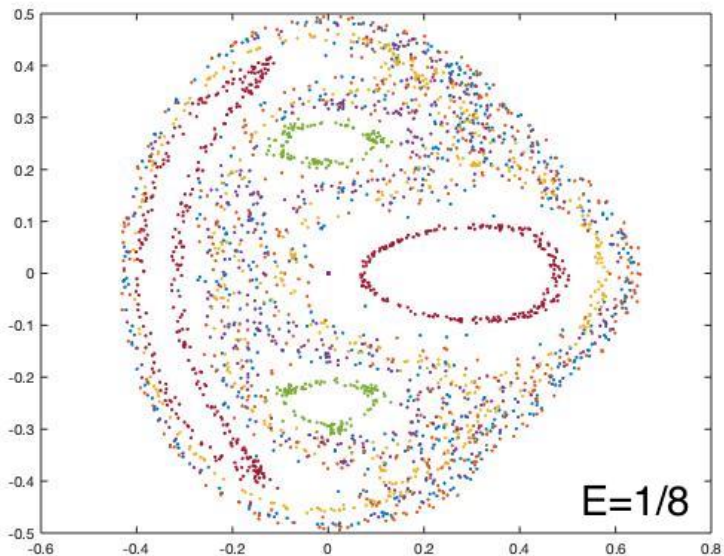
Numerická simulace



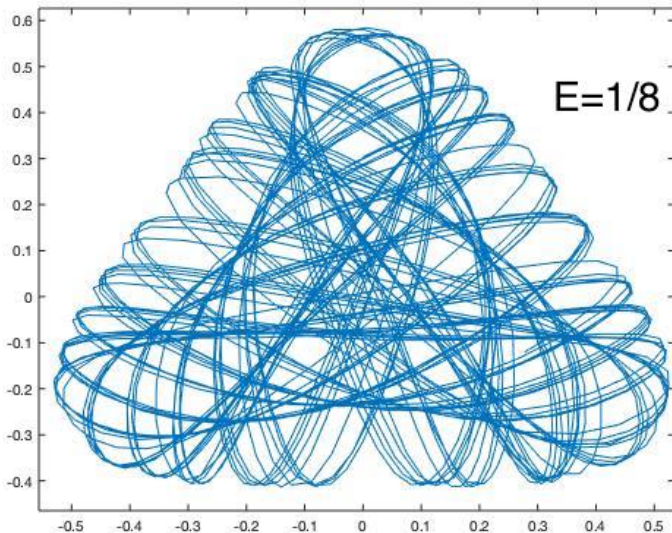
Numerická simulace



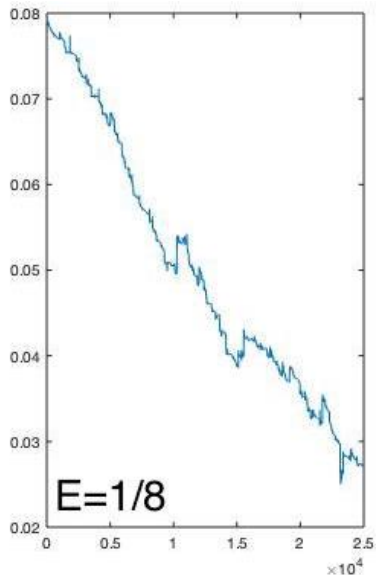
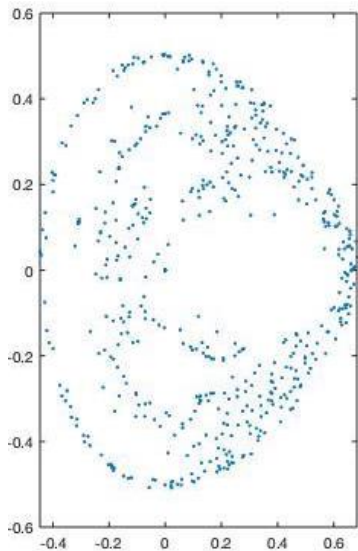
Numerická simulace



Numerická simulace



Numerická simulace



Reference



VERHULST F. (1989)

Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems
Springer-Verlag Berlin



KANTZ H., SCHREIBER T. (2004)

Nonlinear Time Series Analysis
Cambridge University Press



HORAK J., KRLÍN L., RAIDL A. (2003)

Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace
Academia