

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

Katedra teoretickej fyziky a astrofyziky

Turbulencia stlačiteľnej tekutiny pri narušenej Galileovskej
invariancii

2020

Bc. Matej Kecer

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UPJŠ V KOŠICIACH

Katedra teoretickej fyziky a astrofyziky

Turbulencia stlačiteľnej tekutiny pri narušenej Galileovskej
invariancii

Bc. Matej Kecer

Študijný program:

Teoretická fyzika a astrofyzika

Vedúci práce:

RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.

Košice 2020

POĎAKOVANIE

Ďakujem RNDr. Tomášovi Lučivjanskému, PhD. za vedenie mojej práce, za cenné rady, pripomienky a tiež ochotu a čas, ktorý mi pri písaní práce venoval.

ABSTRAKT

V tejto práci sa zaoberáme poľovo-teoretickým modelom plne rozvinutej turbulencie stlačiteľnej tekutiny, popísanej stochastickou Navierovou-Stokesovou rovnicou. Budeme uvažovať náhodnú silu s konečným korelačným časom, tzv. farebný šum, čo z fyzikálneho hľadiska vedie na realistickejší model. Táto voľba má však za následok narušenie Galileovskej invariantnosti. Nadväzujeme tak na prácu [1], v ktorej bol rozobraný podobný model v nestlačiteľnom prípade.

Venujeme sa formulácii poľového modelu pre ďalšie riešenie poruchovou teóriou renormalizačnej grupy. Počítame explicitný tvar propagátorov a interakčných vrcholov vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii, robíme tiež rozmerovú analýzu navrhnutého účinku.

[1] N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M.M. Kostenko and A. V. Malyshev, *Physical Review E*, **97**, 033101, (2018).

Obsah

1	Teoretický model	5
2	Pořovo-teoretický model	8
3	Kanonické dimenzie	10
4	Výpočet matice propagátorov	12
	Literatúra	15

ÚVOD

V štúdiu plne rozvinutej turbulencie, ako aj všeobecne v teoretickej fyzike, sú jedným z ťažiskových princípov symetrie. Navierova-Stokesova (NS) rovnica sa vyznačuje hneď niekoľkými ako invariancia na: translácie v čase a priestore, Galileovské transformácie, priestorové rotácie. So zvyšujúcim sa Reynoldsovým číslom (Re) systém postupne podstupuje spontánne narušenie jednotlivých translačných a rotačných symetrií. Na druhej strane, z fenomenológie vyplýva, že pri veľmi vysokých Re vzniká tendencia obnoviť spomenuté symetrie v štatistickom zmysle. Takéto prúdenie, spravidla pri $Re \gg 1$, nazývame plne rozvinutou turbulenciou, ktorá sa javí ako homogénna a izotropná (pre hlbšiu diskusiu viď [7]). Existuje viacero fenomenologických teórií popisujúcich turbulenciu [3][4][5][6]. Napriek ich významu sa však ukazuje, že tieto neponúkajú vždy dostatočne presné výsledky. Ich predikcie je teda nutné overovať analytickým prístupom. Jedným z nich je aj polovo-teoretická renormalizačná grupa (RG) (viď napr. [10][11]).

Pre modelovanie plne rozvinutej turbulencie sa zvykne používať stochastická NS rovnica s náhodnou vonkajšou silou vyhovujúcou Gaussovmu rozdeleniu. Vo väčšine prác je táto volená ako biely šum, t.j. delta-korelovaná v čase. Voľba bieleho šumu totiž zachováva celkovú symetriu vzhľadom na Galileovské transformácie. V tejto práci však vopred neuvažujeme a pracujeme s farebným šumom. Sila, pri ktorej pripúšťame konečné korelácie v čase, je nakoniec aj realistickejším fyzikálnym modelom. Konečným cieľom takýchto úvah je preskúmať zaujímavé a fyzikálne relevantné prípady, ktoré daná voľba korelačných funkcií pripúšťa a tiež zistiť, či je Galileovská invariancia v štatistickom zmysle obnovená pre merateľné veličiny.

V tejto práci sa venujeme vypracovaniu polového modelu pre ďalšie riešenie metódou poruchovej RG. Práca má nasledovnú štruktúru. V kapitole 1 sa venujeme popisu stochastického modelu pre prípad viskózne stlačiteľnej tekutiny. Zavádzame tiež konkrétny tvar korelačnej funkcie pre náhodnú silu. V kapitole 2 následne formulujeme polovo-teoretický model a elementy korešpondujúcej diagramatickej techniky. V kapitole 3 sa venujeme rozmerovej analýze polového modelu, uvádzame prehľad kanonických dimenzií polí a parametrov jeho účinku. V kapitole 4 uvádzame výpočet matice propagátorov.

1 Teoretický model

V tejto časti sa budeme zaoberať všeobecným popisom problému plne rozvinutej turbulencie. Možným prístupom je štúdium Navierovej-Stokesovej rovnice pre stlačiteľnú viskóznou tekutinu s náhodnou vonkajšou silou [6][8]:

$$\nabla_t v_i = \nu_0(\delta_{ik}\partial^2 - \partial_i\partial_k)v_k + u_0\nu_0\partial_i\partial_kv_k - \partial_ip/\rho + f_i, \quad (1)$$

kde diferenciálny operátor na pravej strane rovnice (1)

$$\nabla_t = \partial_t + v_k\partial_k, \quad (2)$$

je tzv. konvektívna derivácia, v_i je rýchlostné pole, ρ je hustota, p tlak. Nielen v_i , ale aj ρ a p sú polia, ktoré sú funkčnými závislosťami polohy v priestore a čase $x = (t, \mathbf{x})$, kde t je časová premenná a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, pričom d je dimenzia priestoru. Ďalej $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ a $\partial^2 = \partial_i\partial_i$ $u_0 = \mu_0/\nu_0$ je kladný bezrozmerný parameter. Fyzikálne konštanty ν_0 a μ_0 predstavujú koeficienty molekulárnej viskozity [8], $f_i = f_i(x)$ je hustota vonkajšej sily na jednotku hmotnosti. Používame skrátenejší zápis, v ktorom explicitne nezvyrážňujeme sumáciu cez opakujúci sa index. Takúto konvenciu používame v celej práci. V rovnici (1) sme tiež oddelili priečne a pozdĺžne komponenty difúzneho operátora. Okrem Navier-Stokesovej rovnice sú však ešte potrebné dva ďalšie vzťahy na uzavretie teoretického opisu. To sú rovnica kontinuity:

$$\partial_t\rho + \partial_i(\rho v_i) = 0 \quad (3)$$

a stavová rovnica $p = p(\rho)$, ktorú volíme nasledovne [2]:

$$\delta p = c_0^2\delta\rho, \quad (4)$$

kde parameter c_0 je adiabatická rýchlosť zvuku. Stavová rovnica (4) prepája fluktuácie hustoty ρ a tlaku p . Použitím uvedených vzťahov a predpokladu, že fluktuácie vo viskózných členoch môžeme zanedbať [9](nutné pre renormalizovateľnosť polovej teórie), je možné problém sformulovať ako systém dvoch previazaných stochastických diferenciálnych rovníc [2]:

$$\nabla_t v_i = \nu_0(\delta_{ik}\partial^2 - \partial_i\partial_k)v_k + \mu_0\partial_i\partial_kv_k - \partial_i\phi + f_i, \quad (5)$$

$$\nabla_t\phi = -c_0^2\partial_iv_i, \quad (6)$$

kde $\phi = \phi(x)$ je skalárne pole spojené s fluktuáciami hustoty vzťahom $\phi = c_0^2 \ln(\rho/\bar{\rho})$, pričom $\bar{\rho}$ je stredná hodnota ρ .

Ako sme už spomínali, stochastický prístup modeluje turbulenciu náhodnou silou, predstavujúcou vklad energie z vonkajšej škály L . Na základe očakávania univerzálneho správania sa, predpokladáme, že relevantné fyzikálne veličiny nebudú závisieť od presného mechanizmu dopovania energie. Na základe technickej výhodnosti sa potom predpokladá, že náhodná sila je Gaussovského charakteru. Pritom jej stredná hodnota je nulová a tvar korelačnej funkcie plynie z fyzikálnych úvah [10]. Korelačnú funkciu možno predstaviť vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii v tvare [6]:

$$\langle f_i(\omega, \mathbf{k}) f_j(\omega', \mathbf{k}') \rangle = \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') D_f(\omega, k). \quad (7)$$

Delta funkcie v predpise (7) zaručujú invarianciu vzhľadom na priestorové a časové translácie. Ak navyše požadujeme Galileovskú invarianciu modelu, samotná funkcia $D_f(\omega, \mathbf{k})$ musí byť delta-korelovaná v čase (tzv. biely šum) [13]. Čiže korelátor D_f by sa stal nezávislým od ω . Naším cieľom v tejto práci je uvažovať model s narušenou Galileovskou invarianciou, teda pracovať s farebným šumom. V takom prípade korelačný čas môže byť nenulový a nemusí byť malý. Z fyzikálneho hľadiska je takýto model realistickejší. Naskýta sa prirodzene otázka, či bude spomínaná symetria v štatistickom zmysle obnovená pre relevantné veličiny. Volíme teda korelačnú funkciu s náhodnou silou f_i vo forme:

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\omega(t-t')}, \quad (8)$$

pričom argument definujeme ako:

$$\tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 \frac{k^{8-d-(y+2\eta)}}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\}, \quad (9)$$

kde $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ a $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ sú priečne a pozdĺžne projektory, $k = |\mathbf{k}|$, α je voľný parameter (spojený so stlačiteľnosťou), g_{10} je väzbová konštanta. Parameter m , spojený s vonkajšou škálou L vzťahom $m \sim L^{-1}$, odpovedá IR regularizácii. Treba podotknúť, že jeho konkrétny tvar nemá vplyv na univerzálne veličiny typu škálovacích indexov. Zaviedli sme tiež nový parameter w_0 . Tento tvar priamo nadväzuje na model v práci [1], ktorý rozširujeme o stlačiteľnosť. Korelátor (9) obsahuje dva nezávislé škálovacie exponenty: y a η , ktoré spolu s parametrom $\epsilon = 4 - d$ plnia úlohu malých rozvojových parametrov. Fyzikálne relevantné sú dva špeciálne prípady: $w_0 \rightarrow 0$, ktorý

odpovedá náhodnej sile nezávislej od času, resp. $w_0 \rightarrow \infty$, odpovedajúci modelu s nulovým korelačným časom.

2 Poľovo-teoretický model

Stochastický problém popísaný v kapitole 1, konkrétne vzťahmi (5)(6)(8)(9) je podľa [10][11] ekvivalentný poľovému modelu s dvojnásobným počtom polí $\Phi = \{v_i, v'_i, \phi, \phi'\}$ a tzv. De Dominicisovym-Janssenovym účinkom. V našom prípade v tvare [2]:

$$S_v(\Phi) = \frac{v'_i \tilde{D}_{ij} v'_j}{2} + v'_i \left[-\nabla_t v_i + \nu_0 (\delta_{ij} \partial^2 - \partial_i \partial_j) v_j + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_j v_j - \partial_i \phi \right] + \phi' [-\nabla_t \phi + \nu_0 \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i)], \quad (10)$$

kde \tilde{D}_{ij} je korelačná funkcia (9). Vo vzťahu (10) vystupuje aj nový bezrozmerný parameter ν_0 , potrebný na zabezpečenie renormalizovateľnosti teórie. Používame skrátenejší zápis, kde integráciu cez priestorové premenné \mathbf{x} a čas t implicitne predpokladáme, t.j.:

$$\begin{aligned} \phi' \partial_t \phi &= \int dt \int d^d x \phi'(x) \partial_t \phi(x); \\ v'_i D_{ik} v'_k &= \int dt \int d^d x \int d^d x' v_i(t, \mathbf{x}) D_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') v_k(t, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (11)$$

Z rozmerovej analýzy (viď kapitola 3) je zrejmé, že pre $d = 4$ vzniká divergencia v Greenovskej funkcii $\langle v'_i v'_j \rangle$. Teda na zabezpečenie renormalizovateľnosti modelu pre $d = 4$ je nutné, po vzore [2], nahradiť funkciu $\tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ v (7) funkciou:

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 \frac{k^{8-d-(y+2\eta)}}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\} + g_{20} \nu_0^3 \delta_{ij}. \quad (12)$$

Pridaný člen na pravej strane rovnice obsahujúci novú väzbovú konštantu g_{20} absorbuje divergentnú časť $\langle v'_i v'_j \rangle$.

Zmysel poľovo-teoretickej formulácie je, že korelačné funkcie pôvodného stochastického problému sa dajú vyjadriť ako funkcionálne stredné hodnoty s váhou $\exp S_v(\Phi)$, a je teda možné ich stotožniť s Greenovskými funkciami poľového modelu [10][11]. Takto zostavený model (10) je vhodný pre využitie Feynmanovej diagramatickej techniky [10][11]. Čiary v diagramoch reprezentujú propagátory $\langle \Phi \Phi \rangle_0$ voľnej teórie, t.j. kvadratickej časti účinku (10). Jeho nelineárna časť zase určuje interakčné vrcholy (vertexy), v našom prípade dva a to: $-v'_k (v_i \partial_i) v_k$, a $-\phi' (v_i \partial_i) \phi$. Vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii majú propagátory a interakčné vrcholy nasledovný tvar:

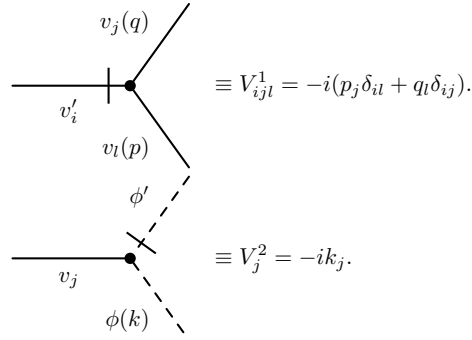
$$\begin{aligned}
\langle v_i v'_j \rangle_0 &= \overline{\langle v'_j v_i \rangle_0} = P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{1}{\epsilon_1} + Q_{ij}(\mathbf{k}) \frac{\epsilon_3}{R}, \\
\langle v_i v_j \rangle_0 &= P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{1}{|\epsilon_1|^2} \left[\frac{d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right] \\
&\quad + Q_{ij}(\mathbf{k}) \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right] \left| \frac{\epsilon_3}{R} \right|^2, \\
\langle \phi v'_j \rangle_0 &= \overline{\langle v'_j \phi \rangle_0} = -\frac{i c_0^2 k_j}{R}, \\
\langle v_i \phi' \rangle_0 &= \overline{\langle \phi' v_i \rangle_0} = -\frac{i k_i}{R}, \\
\langle \phi \phi' \rangle_0 &= \overline{\langle \phi' \phi \rangle_0} = \frac{\epsilon_2}{R}, \\
\langle \phi \phi \rangle_0 &= \frac{c_0^4 k^2}{|R|^2} \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right], \\
\langle v_i \phi \rangle_0 &= \overline{\langle \phi v_i \rangle_0} = \frac{i c_0^2 \epsilon_3 k_i}{|R|^2} \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right], \\
\langle \phi' \phi' \rangle_0 &= \langle v'_i \phi' \rangle_0 = \langle v'_i v'_j \rangle_0 = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

kde symbol \bar{z} označuje komplexne zdruzenie výrazu z . Pre skrátenie zápisu sme použili označenia

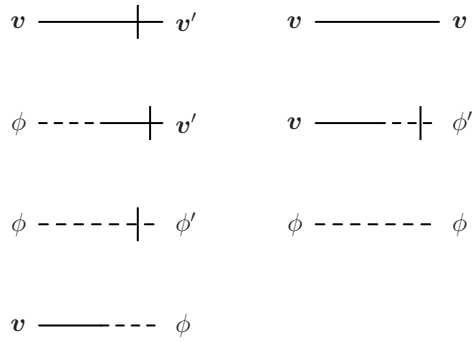
$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= -i\omega + \nu_0 k^2, & \epsilon_2 &= -i\omega + u_0 \nu_0 k^2, \\
\epsilon_3 &= -i\omega + v_0 \nu_0 k^2, & R &= \epsilon_2 \epsilon_3 + c_0^2 k^2
\end{aligned} \tag{14}$$

a

$$d_1^f = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 k^{8-d-y-2\eta}. \tag{15}$$



Obr. 1: Grafické znázornenie interakčných vrcholov a ich tvar vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii.



Obr. 2: Grafické znázornenie propagátorov.

3 Kanonické dimenzie

Dynamické modely, akým je aj nami študovaný model (10), vykazujú vo všeobecnosti dve nezávislé škály [10][12]: časovú T a dĺžkovú L . Potom kanonická dimenzia ľubovoľnej veličiny F (či už poľa alebo parametra) je popísaná dvomi dimenziami: frekvenčnou d_F^ω a hybnostnou d_F^k . Tie sú zvyčajne normalizované podľa nasledovného predpisu:

$$\begin{aligned}
 d_k^k &= -d_x^k = 1, & d_k^\omega &= d_x^\omega = 0, \\
 d_\omega^\omega &= -d_t^\omega = 1, & d_\omega^k &= d_t^k = 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

resp.,

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}. \tag{17}$$

Dimenzie všetkých veličín je potom možné získať požadovaním splnenia podmienky, že každý člen účinku musí byť bezrozmerný nezávisle, v oboch typoch dimenzie. Z

Tabuľka 1: Kanonické dimenzie polí a parametrov.

F	v'_i	v_i	ϕ'	ϕ	m	ν_0	c_0	g_{10}	g_{20}	u_0, v_0, α	w_0
d_F^k	$d + 1$	-1	$d + 2$	-2	1	-2	-1	y	ϵ	0	η
d_F^ω	-1	1	-2	2	0	1	1	0	0	0	0
d_F	$d - 1$	1	$d - 2$	2	1	0	1	y	ϵ	0	η

účinku (10) je zrejmé, že $\partial_t \propto \partial^2$, preto celková kanonická dimenzia je určená ako $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$. Kanonické dimenzie modelu (10) uvádzame v tabuľke 1.

Celková kanonická dimenzia ľubovoľnej 1-ireducibilnej Greenovskej funkcie $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-ir}$ je potom vyjadrená ako

$$\delta_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (18)$$

kde d_Φ je kanonická dimenzia daného poľa Φ a N_Φ je počet polí daného typu vstupujúcich do Γ pričom je nutné presumovať cez všetky typy polí [10][11][12]. Greenovské funkcie s nezápornou d_Γ obsahujú UV divergencie, ktoré je nutné ďalej riešiť metódou poruchovej renormalizačnej grupy.

4 Výpočet matice propagátorov

Propagátory vieme získať z účinku poľovej teórie (10). Jeho kvadratickú časť, t.j. bilineárnu vzhľadom na polia, je možné prepísať do tvaru:

$$S_0 = -\frac{1}{2}\varphi K \varphi, \quad (19)$$

kde

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v} \\ \phi' \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Keďže účinok musí byť skalárna veličina, je zrejme že prvky matice K budú mať tenzorovú štruktúru:

$$K = \begin{pmatrix} T_{jm} & T_{jm} & V_j & V_j \\ T_{jm} & T_{jm} & V_j & V_j \\ V_m & V_m & S & S \\ V_m & V_m & S & S \end{pmatrix}, \quad (21)$$

kde T_{jm} je všeobecný tenzor 2. rádu, V_j je vektorová veličina a S je skalár. Zo vzťahu (19) sa dopracujeme k explicitnému tvaru K matice vo Fourierovej reprezentácii:

$$K = \begin{pmatrix} AP_{jm} + BQ_{jm} & \epsilon_1 P_{jm} + \epsilon_2 Q_{jm} & 0 & ik_j \\ \bar{\epsilon}_1 P_{jm} + \bar{\epsilon}_2 Q_{jm} & 0 & -ic_0^2 k_j & 0 \\ 0 & ic_0^2 k_m & 0 & \epsilon_3 \\ -ik_m & 0 & \bar{\epsilon}_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

kde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sú definované v (14). Hľadáme maticu propagátorov Δ , teda Greenovské funkcie voľnej teórie. Preto z definície musí byť splnená nasledovná rovnosť:

$$\Delta K = \delta, \quad (23)$$

resp. v zložkovom tvare:

$$\Delta_{mi}K_{ij} = \delta_{mj}, \quad (24)$$

kde δ_{mj} predstavuje Diracovu delta funkciu. Vzhľadom na tvar K je teda štruktúra Δ a δ nasledovná:

$$\Delta = \begin{pmatrix} T_{ij} & T_{ij} & V_i & V_i \\ T_{ij} & T_{ij} & V_i & V_i \\ V_j & V_j & S & S \\ V_j & V_j & S & S \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_{im} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{im} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Vo vzťahoch (25) je pre prvky s dvojindexovou štruktúrou vhodné použiť rozklad na priečnu a pozdĺžnu zložku:

$$T_{ij} = a P_{ij} + b Q_{ij}, \quad (26)$$

kde a, b sú skaláre. Takým spôsobom a následným využitím vzťahu (24) sa dopracujeme k úplnej sústave lineárnych rovníc o 20 neznámych, a ich riešením k explicitnému tvaru matice propagátorov Δ , ktorej prvky sú uvedené v (13).

Záver

V tejto práci sme vypracovali poľovo-teoretický model plne rozvinutej trubulencie stlačiteľnej viskózne tekutiny. Ako jeho základ sme použili stochastickú Navierovu-Stokesovu rovnicu s farebným šumom, teda s náhodnou silou s ľubovoľným korelačným časom. Takáto voľba je z fyzikálneho hľadiska realistickejšia, avšak má za následok narušenie Galileovskej invariancie. Nami navrhnutý účinok sme ďalej analyzovali. Spočítali sme explicitný tvar propagátorov voľnej teórie vo Fourierovej reprezentácii a tiež tvar interakčných vrcholov pre ďalšie využitie v rámci Feynmanovej diagramatickej techniky. Urobili sme rozmerovú analýzu navrhnutého účinku, ktorá nám umožňuje spočítať celkovú kanonickú dimenziu ľubovoľnej Greenovskej funkcie, a teda zistiť stupeň divergencie jednotlivých diagramov. Model je tak pripravený na ďalšie riešenie metódou poruchovej renormalizačnej grupy.

Literatúra

- [1] N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M.M. Kostenko and A. V. Malyshev, *Physical Review E*, **97**, 033101, (2018).
- [2] N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M.M. Kostenko, and T. Lucivjansky, *Phys. Rev. E* **95**, 033120, (2017); *EPJ Web of Conf.* **125**, 05006 (2016); **137**, 10003 (2017).
- [3] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**(4), 299 (1941);
reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 9 (1991).
- [4] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **31**(6), 538 (1941).
- [5] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**(1), 19 (1941);
reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 15 (1991).
- [6] A. S. Monin and A. M. Yaglom *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 2, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [7] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1995).
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford).
- [9] D. Yu. Volchenkov and M. Yu. Nalimov, *Theor. Math. Phys.* **106**, 375 (1996).
- [10] A. N. Vasil'ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics*(Boca Raton, Chapman Hall/CRC, 2004).
- [11] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (4th edition, Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [12] U. Täuber, *Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior* Cambridge University Press, New York, 2014).
- [13] L.Ts. Adzhemyan, N.V. Antonov, A.N. Vasil'ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence* (Gordon & Breach, London, 1999).