

Turbulencia stlačiteľnej tekutiny pri narušenej Galileovskej invariancii



Bc. Matej Kecer

Vedúci práce: RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.

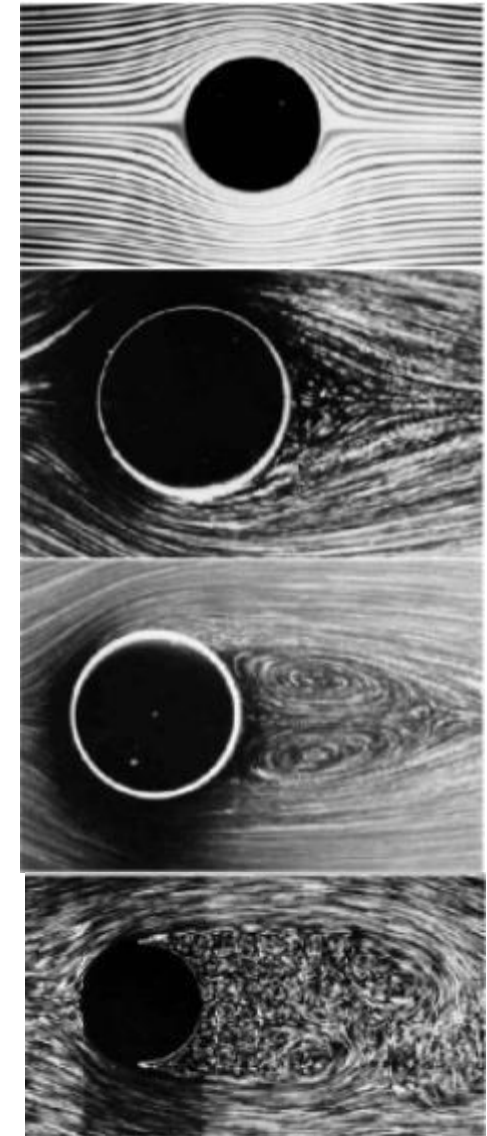
Úvod do problematiky:

Len niekoľko symetrií Navierovej-Stokesovej rovnice:

- Translácie v čase
- Translácie v priestore
- Invariancia vzhľadom na Galileovské transformácie
- Priestorové rotácie

Niektoré z týchto sú v praxi narušené už experimentálnym vybavením.

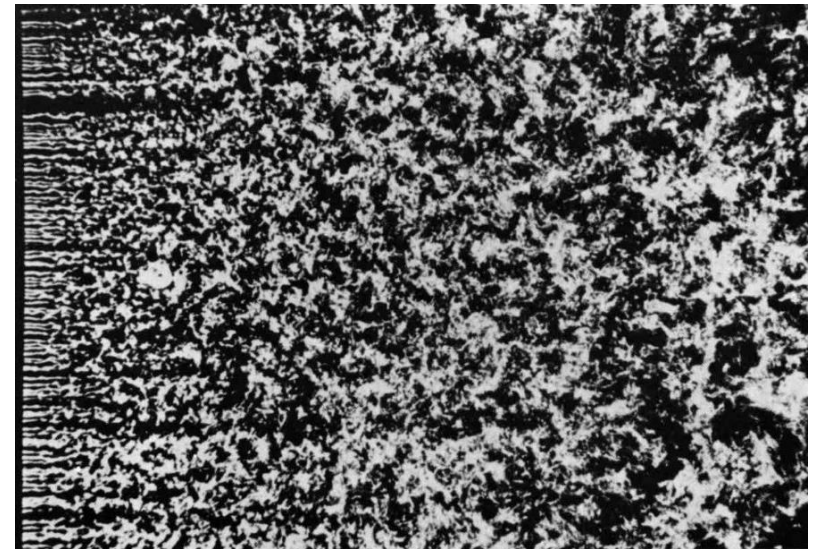
Ostaté sa spontánne narúšajú pri zvyšujúcom sa Re . (pr. Obr. 1)



Obr. 1 [1]

Pri $Re \gg 1$ pozorujeme spontánnu obnovu daných symetrií
v štatistickom zmysle.

Taký tok sa nazýva plne rozvynutá turbulencia.
(ilustrácia na obr. 2)



Obr. 2 [1]

Teoretický model

Stochastický problém plne rozvynutej turbulencie sa dá popísať sústavou dvoch navzájom previazaných parciálnych stochastických diferenciálnych rovníc.

$$\nabla_t v_i = \nu_0(\delta_{ik}\partial^2 - \partial_i\partial_k)v_k + \mu_0\partial_i\partial_kv_k - \partial_i\phi + f_i,$$

$$\nabla_t\phi = -c_0^2\partial_iv_i,$$

kde

$$\nabla_t = \partial_t + v_k\partial_k,$$

predstavuje konvektívnu deriváciu.

Voľba korelačnej funkcie

Túto volíme ako farebný šum, t.j. v tvare:

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{k > m} d^d k \, \tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')},$$

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k > m} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t')},$$

$$\tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 \frac{k^{8-d-(y+2\eta)}}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\},$$

Pořovo-teoretický model

Vychádza z de Dominicisovho-Jansenovho účinku. Má tvar:

$$S_v(\Phi) = \frac{v'_i \tilde{D}_{ij} v'_j}{2} + v'_i \left[-\nabla_t v_i + \nu_0 (\delta_{ij} \partial^2 - \partial_i \partial_j) v_j + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_j v_j - \partial_i \phi \right] \\ + \phi' [-\nabla_t \phi + \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i)],$$

kde znova

$$\nabla_t = \partial_t + v_k \partial_k,$$

Poľovo-teoretický model

Účinok vieme rozdeliť na dve časti – kvadratickú a interakčnú.

Kvadratickú časť vieme zapísať v tvare:

$$S_0 = -\frac{1}{2}\varphi K \varphi,$$

kde jednotlivé symboly odpovedajú:

$$\varphi = \begin{pmatrix} v' \\ v \\ \phi' \\ \phi \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} T_{jm} & T_{jm} & V_j & V_j \\ T_{jm} & T_{jm} & V_j & V_j \\ V_m & V_m & S & S \\ V_m & V_m & S & S \end{pmatrix}$$

Invertovaním matice K sa dostávame k matici propagátorov, ktorej prvky sú Greenovské funkcie (propagátory) voľnej teórie. Jej prvky sú:

Pričom používame značenie:

$$\langle v_i v'_j \rangle_0 = \overline{\langle v'_j v_i \rangle_0} = P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{1}{\epsilon_1} + Q_{ij}(\mathbf{k}) \frac{\epsilon_3}{R},$$

$$\begin{aligned} \langle v_i v_j \rangle_0 &= P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{1}{|\epsilon_1|^2} \left[\frac{d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right] \\ &+ Q_{ij}(\mathbf{k}) \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right] \left| \frac{\epsilon_3}{R} \right|^2, \end{aligned}$$

$$\langle \phi v'_j \rangle_0 = \overline{\langle v'_j \phi \rangle_0} = -\frac{i c_0^2 k_j}{R},$$

$$\langle v_i \phi' \rangle_0 = \overline{\langle \phi' v_i \rangle_0} = -\frac{i k_i}{R},$$

$$\epsilon_1 = -i\omega + \nu_0 k^2,$$

$$\epsilon_2 = -i\omega + u_0 \nu_0 k^2,$$

$$\epsilon_3 = -i\omega + v_0 \nu_0 k^2,$$

$$R = \epsilon_2 \epsilon_3 + c_0^2 k^2$$

$$d_1^f = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 k^{8-d-y-2\eta}.$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi \phi' \rangle_0 &= \overline{\langle \phi' \phi \rangle_0} = \frac{\epsilon_2}{R}, \\
\langle \phi \phi \rangle_0 &= \frac{c_0^4 k^2}{|R|^2} \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right], \\
\langle v_i \phi \rangle_0 &= \overline{\langle \phi v_i \rangle_0} = \frac{i c_0^2 \epsilon_3 k_i}{|R|^2} \left[\frac{\alpha d_1^f}{\omega^2 + \nu_0^2 w_0^2 k^{4-2\eta}} + g_{20} \nu_0^3 \right], \\
\langle \phi' \phi' \rangle_0 &= \langle v'_i \phi' \rangle_0 = \langle v'_i v'_j \rangle_0 = 0,
\end{aligned}$$

Pričom používame značenie:

$$\epsilon_1 = -i\omega + \nu_0 k^2,$$

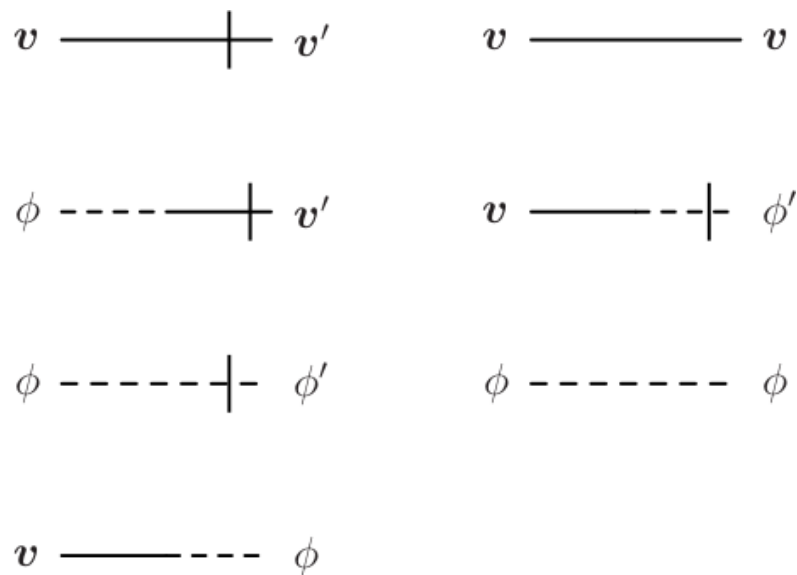
$$\epsilon_2 = -i\omega + u_0 \nu_0 k^2,$$

$$\epsilon_3 = -i\omega + v_0 \nu_0 k^2,$$

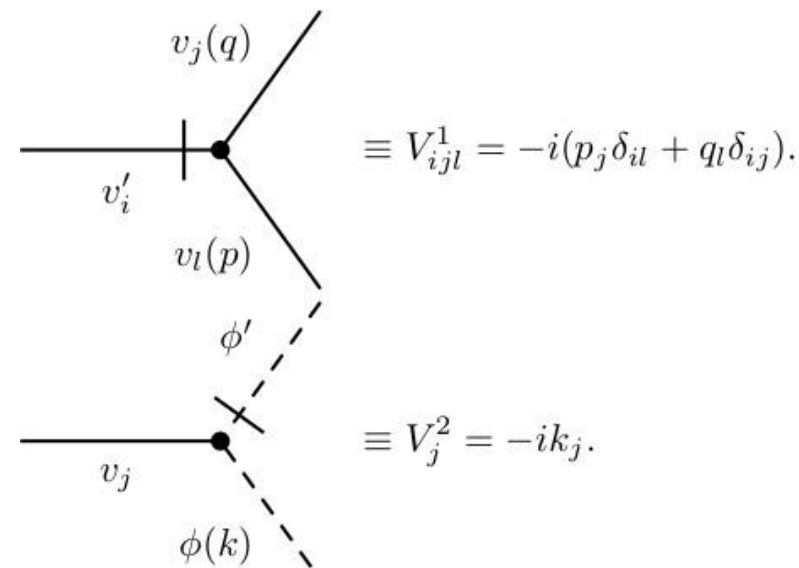
$$R = \epsilon_2 \epsilon_3 + c_0^2 k^2$$

$$d_1^f = g_{10} \nu_0^5 w_0^2 k^{8-d-y-2\eta}.$$

Propagátory a interakčné vrcholy sú elementami tzv. Feynmanovej diagramatickej techniky.
V grafickej reprezentácii ich znázorňujeme:



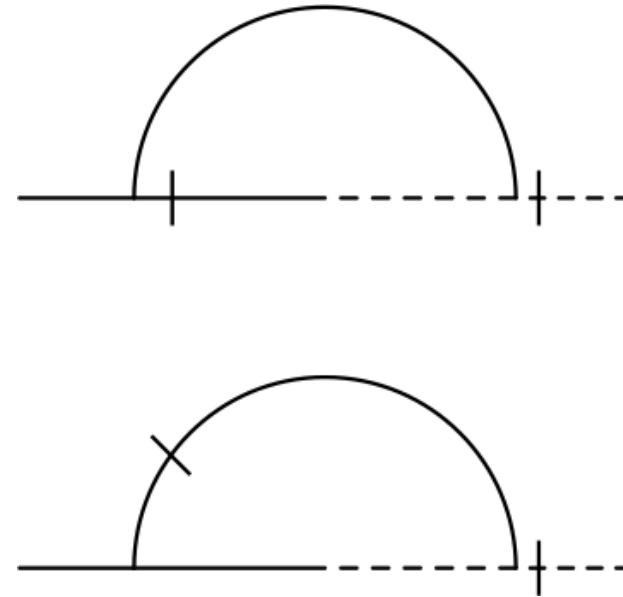
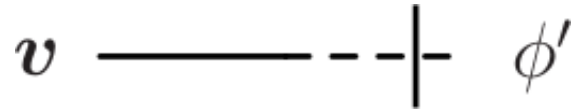
Obr. 3: Grafické znázornenie propagátorov



Obr. 4: Grafické znázornenie interakčných vrcholov a ich tvar

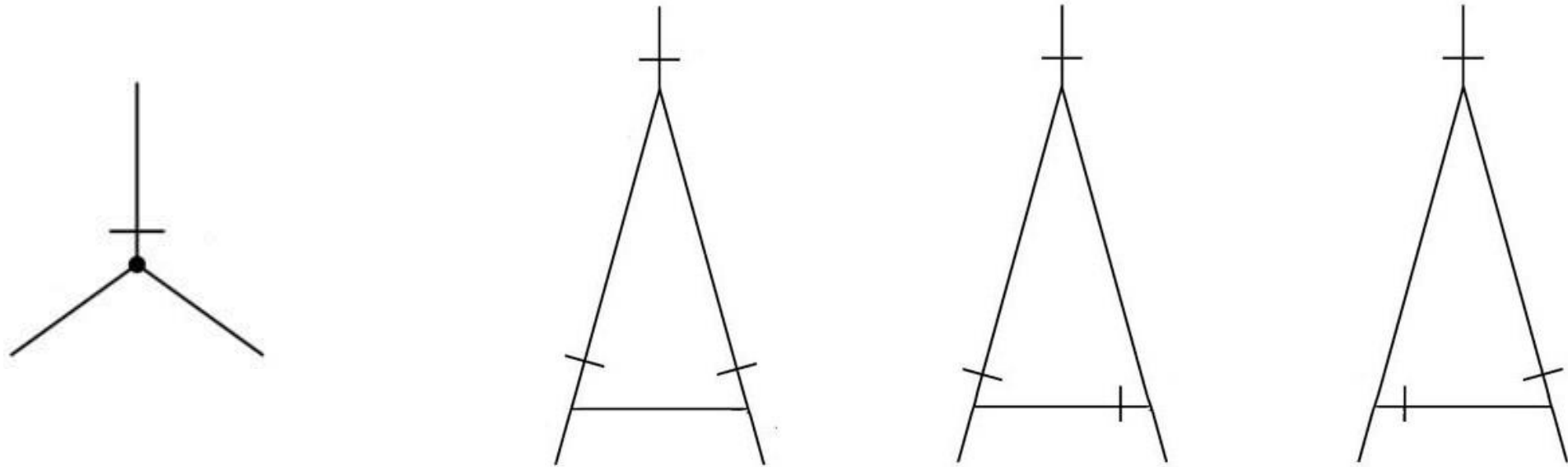
Tvar vrcholov vo frekvenčno-hybnostnej reprezentácii (uvedené vedľa ich grafickej podoby) sa určuje z interakčnej časti účinku Fourierovou transformáciou daných členov.

Príklad jednoslučkových diagramov ku greenovskej funkcii $\Gamma_{v\Phi'}$:



Obr. 5: Grafické znázornenie propagátora a jemu prislúchajúce divergujúce diagramy v jednoslučkovej aproximácii

Príklad diagramov ku výpočtu trojbodovej greenovskej funkcie, tzv. vertex diagramy.



Obr. 6: Grafické znázornenie interakčného vrcholu a niektoré z jemu prislúchajúcich divergujúcich diagramov v jednoslučkovej aproximácii

Ďakujem za pozornosť

Zdroje

[1] Van Dyke, M. 1982. An Album of Fluid Motion. The Parabolic Press, Stanford, CA. (Photos by Thomas Corke, Hassan Nagib)