

# SCALING OF THE GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION

WITH NEGATIVE VALUE OF PARAMETER  $\alpha$

Anežka Lhotáková  
FJFI ČVUT  
25.6.2021

# CONTENT

- 1) BALANCED DENSITIES
- 2) GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION
- 3) PROBLEM IN APPLICATION
- 4) SCALING CONDITION

# CONTENT

- 1) BALANCED DENSITIES
- 2) GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION
- 3) PROBLEM IN APPLICATION
- 4) SCALING CONDITION

# BALANCED DENSITIES

*Definition:*

Function  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is called balanced density, when following axioms are fulfilled:

1.  $\text{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$ ;

2.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ;

3.  $f(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$ ;

4.  $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ;

5.  $\text{supp}(f) \subset (0, +\infty)$ ;

6.  $\exists \kappa \in \mathbb{R}_0^+$ :

$$\alpha > \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{\alpha x} = +\infty,$$

$$\alpha < \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{\alpha x} = 0.$$

DENSITY

+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

PROBABILITY DENSITY

# BALANCED DENSITIES

EXPONENTIAL DISTRIBUTION

$$f(x) = Ae^{-\lambda x}$$

$$A > 0, \lambda > 0$$

ERLANG DISTRIBUTION

$$f(x) = Ax^n e^{-\lambda x}$$

$$A > 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0$$

GAMMA DISTRIBUTION

$$f(x) = Ax^\alpha e^{-\lambda x}$$

$$A > 0, \lambda > 0, \alpha \geq 0$$

GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION (GIG)

$$g(x) = Ax^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}$$

$$A > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0$$

# BALANCED DENSITIES

Proof:  $(\forall \alpha < 0)(g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}))$   $(\Leftrightarrow g(x) \in \mathcal{L}(0, +\infty))$

$$\rightarrow |g(x)| = \left| \underbrace{x^\alpha e^{-\frac{b}{x}}}_{h_1(x)} e^{-\lambda x} \right| \leq |e^{-\lambda x} h_1(x_{max})| \in \mathcal{L}(0, +\infty)$$

$$\rightarrow x_{max} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$|g(x)| = \left| x^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}} \right| \leq \left| \left( -\frac{\beta}{\lambda} \right) e^\alpha e^{-\lambda x} \right| \leq K e^{-\lambda x} \in \mathcal{L}(0, +\infty)$$

# CONTENT

- 1) BALANCED DENSITIES
- 2) GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION
- 3) PROBLEM IN APPLICATION
- 4) SCALING CONDITION

# GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION

Normalization and asymptotic approximation of scaling constant for  $\alpha \geq 0$ :

$$g(x) = Ax^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\frac{\beta}{x}}$$

Normalization constant:

$$A = \frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)^{\alpha+1}}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}$$

Asymptotic approximation:

$$\lambda = \alpha + \beta + \frac{3}{2}$$

$$K_\alpha(x) = K_{-\alpha}(x)$$



# GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION

1. scaling equation:  $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) = 1$ ;
2. derivation of integral depending on parameter;
3. differential equation for  $K_{\alpha}(\sqrt{\beta\lambda})$ ;
4. solution for  $\beta \ll 1$  and  $\beta \rightarrow +\infty$ ;
5. asymptotic approximation

$$K_{\alpha}(x) = K_{-\alpha}(x)$$

# GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION

For both  $\alpha \geq 0$  and  $\alpha < 0$  is the asymptotic approximation the same:

$$\lambda = \alpha + \beta + \frac{3}{2}$$

2.4. GIG ROZDĚLENÍ

Tedy aby mohla platit rovnost (2.29), hledanou množinu

Tím se dostáváme k závěru této sekce, které funkce  $\Phi(\beta, \lambda)$  splňuje podmínky generuje implicitní funkci  $\lambda(\beta)$ , což značí byli schopni řešit škálovací rovnici, můžeme

**2.4.2 Škálovací rovnice**

$$\mu_{1(GIG)} = \frac{(\sqrt{\beta})^{\alpha+1}}{2 \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^\infty \frac{1}{2 \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \frac{1}{(\sqrt{\beta})^{\alpha+1}} \frac{1}{2 \mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} dx$$

Z tohoto výpočtu se nám nepodaří e aproximativních metod.

Poznámka 2.1. Uvažujeme-li ryzí no

**2.4.3 Aproximace škálovací p**

Škálováním GIG hustoty pro  $\alpha$  n My chceme dopočítat škálovací podn dle kterého je  $\mathcal{K}_{-\alpha}(x) = \mathcal{K}_{\alpha}(x)$ . D obdobné výpočty.

**Existence řešení škálovací rovnice**

Než se začneme zabývat aproxi škálovací rovnici řešit. Díky výsledk dvojici parametrů  $\alpha \geq 0, \beta > 0$ . Ov problém na druhém obecném momen Předpokládáme normovanou a škál podmínku (2.24)

odkud získáme rovnost

2.4. GIG ROZDĚLENÍ

30

- V posledním předpokladu musíme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x^{-\alpha} e^{-x} \mathcal{K}_{-\alpha}(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x^{-\alpha} e^{-x} \mathcal{K}_{\alpha}(x))$$

V poslední rovnosti je zahrnuto více l demě je proto nadále rozvádět. Můžeme nyní začít řešit rovnici (2.13)

Spočítáme druhou Cauchyho

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x^{-\alpha} e^{-x} \mathcal{K}_{\alpha}(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (x^{-\alpha} e^{-x} \mathcal{K}_{\alpha}(x))$$

Symbole  $\nabla$  a  $\blacksquare$  opět zna u  $\nabla$ , který značí větu o

- F(x) konverguje a předpoklad je splněn
- Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  i. metem \*
- Najdeme integrabilní majorantu de

**Škálování pro malé hodnoty y**

Opět se v této kapitole soustředíme v [2] a její asymptota je popsána rovni

Jako první se pokusíme odvodit šká jdeme od klasického značení ke značen např.

$$1 + \frac{(-10)}{\alpha}$$

Stále chceme vyřešit škálovací rovnici byla splněna rovnost

- Pro všechna  $y \in (0, +\infty)$  existuje
- Funkce  $y \mapsto xy^{-\alpha-2} e^{-y} e^{-\frac{2}{y}}$  je mě
- Integrabilní majorantu jsme nalezl

2.4. GIG ROZDĚLENÍ

32

kde za A volíme normovací konstantu

$$\beta = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\lambda = x^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$I(y, x) = \int_0^{\infty} x^{-\alpha} dx$$

Aproximace  $\mathcal{K}_{-\alpha+1}$  a  $\mathcal{K}'_{-\alpha+1}$  dosadíme ponechme označení  $(2^{-\alpha} y x)^{\frac{1}{\alpha}} = x$ . T

$$\left[ \frac{2}{1-\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right] (2x - 2)$$

Následně, provedeme-li sérii úprav a d ideme ke škálovací rovnici pro malé h

2.4. GIG ROZDĚLENÍ

34

Po aplikaci inverzní substituce

Spočítáme derivaci  $\mathcal{K}'_{-\alpha}(x)$

$$\mathcal{K}'_{-\alpha}(x) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[ \frac{1}{2x} \left( 1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x} \right) + \left( 1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x} \right) + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x^2} \right]$$

Dosadíme  $\mathcal{K}_{-\alpha}$  a  $\mathcal{K}'_{-\alpha}$  do rovnice (2.18), která v této formě ještě nebyla ovlivněna aproximací pro malé y. Stejně jako v minulé sekci ponechme pro přehlednost v tomto mezivýpočtu označení argumentu Macdonaldovy funkce jako  $(2^{-\alpha} y x)^{\frac{1}{\alpha}} = x$ . Získáme tak rovnici

$$\left[ \frac{2}{1-\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right] \left( 1 + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x} \right) - \frac{x}{1-\alpha} \left[ \frac{1}{2x} + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{16x^2} + 1 + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x} + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 3}{8x^2} \right] = 0,$$

terou po dosazení argumentu  $x = (2^{-\alpha} y x)^{\frac{1}{\alpha}}$  upravíme na finální tvar škálovací rovnice pro velké odnoty y

$$\frac{4\alpha^2}{1-\alpha} k^{\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha} + 1} + (16\alpha^2 - 32\alpha + 12) k^{\frac{2}{\alpha}} y^{\frac{2}{\alpha}} - (4\alpha^2 - 16\alpha + 15) 2^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} k^{\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha} + 1} - 2^{\frac{4-2\alpha}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}} y^{\frac{2}{\alpha}} + 8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15 = 0. \quad (2.25)$$

předpokládáme opět, že  $x(y) = ky$ , kde reálné číslo k představuje směrnici asymptoty této funkce. osadíme vztah pro  $x(y)$  a celou rovnici vydělíme výrazem  $y^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\frac{4\alpha^2}{1-\alpha} k^{\frac{1}{\alpha}} - 2^{\frac{4-2\alpha}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}} + \left[ 4(4\alpha^2 - 8\alpha + 3) k^{\frac{2}{\alpha}} - (4\alpha^2 - 16\alpha + 15) 2^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} k^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \frac{8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15}{y^{\frac{1}{\alpha}}} = 0.$$

tože pro  $y \rightarrow +\infty$  se druhý a třetí člen blíží k 0, dovolíme si je zanedbat a zůstane rovnost

$$\frac{4\alpha^2}{1-\alpha} k^{\frac{1}{\alpha}} - 2^{\frac{4-2\alpha}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}} = 0,$$

erá musí platit, aby naše škálovací úloha měla smysl. Snadnou úpravou se dostaneme k výsledku

$$k = \frac{1}{2}.$$

něhož plyne poměr  $\frac{x(y)}{y} = \frac{1}{2}$ . Jako v předchozí sekci se opět vrátíme ke škálovací rovnici (2.25), podělíme ji výrazem  $(y x)^{\frac{1}{\alpha}}$  a dosadíme poměr. Vydje rovnice

$$4\alpha^{\frac{2}{\alpha}} - 2^{\frac{4-2\alpha}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{1}{\alpha}} + 2\alpha - 3 = 0, \quad (2.26)$$

přičemž člen  $\frac{8\alpha^3 - 36\alpha^2 + 46\alpha - 15}{y^{\frac{1}{\alpha}}}$  byl zanedbán.

Podíváme-li se zpět do sekce **Škálování pro malé hodnoty y**, zjistíme, že jsme našli naprosto totožnou rovnici k (2.21) pro malé hodnoty y. Hledání asymptotického vztahu by tudíž proběhlo stejně a došli bychom k výsledku (2.23). Tim se nám ospravedlňuje i nejasnost @, protože, ačkoli jsme si dovolili provést limitu do nekonečna, nenarušilo nám to správnost řešení, neboť i pro velká y platí stejný vztah.

V této kapitole jsme navázali na výzkumný úkol [2], ve kterém byl nalezen asymptotický vztah pro  $\alpha \geq 0$ , a to

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2}.$$

My jsme nyní ukázali, že pro  $\alpha < 0$  je asymptotický vztah úplně stejný. Spojíme-li nalezený vztah s podmínkou existence řešení (2.11), můžeme prohlásit, že asymptotický vztah škálovací konstanty  $\lambda$  pro GIG distribuci s parametry  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0$  je dán předpisem

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2},$$

pokud je splněna podmínka existence řešení  $\alpha + \beta + 2 > 0$ .

# CONTENT

- 1) BALANCED DENSITIES
- 2) GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION
- 3) PROBLEM IN APPLICATION
- 4) SCALING CONDITION

# PROBLEM IN APPLICATION

Let  $X \sim \text{GIG}(x; \alpha, \beta, \lambda)$ ,  $\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$  and  $\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx = 1$ .

Then

$$\mu_2 = \left\{ \mu_k(g_{\text{GIG}}) = \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+1+k}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \right\} = \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda}.$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \not\geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} !!!$$

# CONTENT

- 1) BALANCED DENSITIES
- 2) GENERALIZED INVERSE GAUSSIAN DISTRIBUTION
- 3) PROBLEM IN APPLICATION
- 4) SCALING CONDITION

# SCALING CONDITION

Examination of the existence of the scaling equations' solution:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\beta, \lambda) = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda} \frac{\mathcal{K}_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\mathcal{K}_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}} - 1$$

Idea: If we find  $M = \{\beta > 0: \Phi(\beta, \lambda) = 0\}$ , then  $\Phi(\beta, \lambda)$  generates unique function  $\lambda(\beta)$ .

We found scaling condition for  $\alpha < -2$  in the following form:  $\alpha + \beta + 2 > 0$ .

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION!

References:

[1] VACKOVÁ, Jana: *Multi-headway statistika systémů s kombinovanými potenciály*, Výzkumný úkol FJFI ČVUT, 2016