Odhadování parametrů rozdělení kritických světlostí

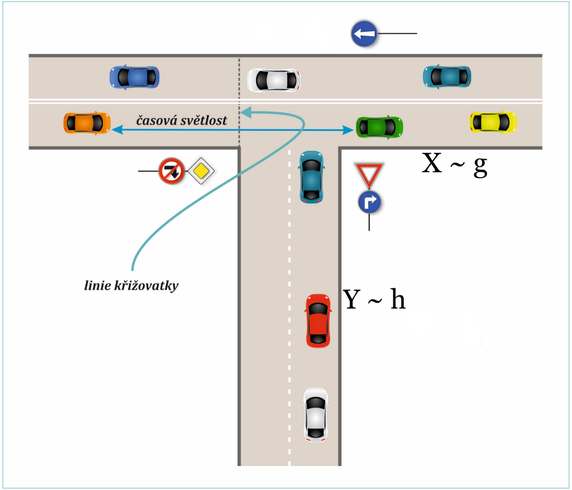
Školitel: doc. Ing. Tomáš Hobza, PhD.
Konzultant: Ing. Marek Bukáček, Ph.D.

Eliška Pečenková

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

SPMS 2023

Matematický model



Cíl práce

- odvození dílčích distribucí řádu $k \in \mathrm{N}_0$, tj. hustot pravděpodobnosti časových světlostí akceptovaných právě k vozidly
- nalezení rozdělení kritických časových světlostí
- analýza dopravních dat

- Inspirací je zejména publikovaný článek *Krbálek, M., Hobza, T. a další, Statistical aspects of gap-acceptance theory for unsignalized intersection capacity. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 594, 2022, 1-19.*

Cíl práce

- předpokládáme, že matematický popis vhodný pro distribuci časových světlostí a kritických časových světlostí lze nalézt uvnitř rodiny zobecněných inverzních gaussovských hustot pravděpodobnosti[1] tvaru

$$f(x) = A\Theta(x)\; x^{\alpha}\; \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{x}}\; \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

kde $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \geq 0$ a $\lambda > 0$

[1] Dále jen GIG z anglického Generalized Inverse Gaussian distribution.

Formát dat

- očekávaným formátem datového vzorku pro naši úlohu je tabulka N časových světlostí x a k nim přiřazené hodnoty jejich akceptačních řádů k
- množinu všech časových světlostí A, zaznamenaných na hlavní komunikaci, lze poté rozložit na disjunktní podmnožiny $\{A_k : k \in \mathrm{N}_0\}$ dle daného akceptačního řádu
- potom definujeme tzv. výběrový akceptační poměr řádu k

$$\delta_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

Dílčí distribuce řádu k

- předpoklad $X \sim g$, $Y \sim h$, $\sum_{i=1}^{k} Y_i \sim \bigstar_{i=1}^{k} h = h_k$, kde Y_i jsou "iid" h
- $D_k := X \,\Big|\, \left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq X \wedge \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > X \right) \sim f_k(u)$
- pokud označíme

$$\mathrm{G}_k(u) = g(u) \int_0^u \int_0^{+\infty} h_k(u - v) h(w + v) \mathrm{d}w \mathrm{d}v,$$

  můžeme psát

$$f_k(u) = \frac{\mathrm{G}_k(u)}{\int_0^{+\infty} \mathrm{G}_k(u) \mathrm{d}u}$$

- vedlejší produkt $\Delta_k = \int_0^{+\infty} \mathrm{G}_k(u) \mathrm{d}u$

Dílčí distribuce řádu k

konkrétní rozdělení

- předpoklad $X \sim \mathrm{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$, $Y \sim \mathrm{GIG}(\gamma, \mu, \omega)$, $\sum_{i=1}^{k} Y_i \mathrel{\dot\sim} \mathrm{GIG}(k\gamma + (k-1)\frac{3}{2}, k^2\mu, \omega)$
- lze získat pouze odhady $\tilde{f}_k(u)$ a $\tilde{\Delta}_k$:

$$\tilde{f}_k(u) = \frac{\int_0^u \int_0^{+\infty} u^\alpha (u-v)^{k\gamma+(k-1)\frac{3}{2}} (v+w)^\gamma \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{u} - \frac{k^2\mu}{u-v} - \frac{\mu}{(v+w)}} \, \mathrm{e}^{-\lambda u - \omega(w+u)} \mathrm{d}w \mathrm{d}v}{\int_0^{+\infty} \int_0^u \int_0^{+\infty} u^\alpha (u-v)^{k\gamma+(k-1)\frac{3}{2}} (v+w)^\gamma \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{u} - \frac{k^2\mu}{u-v} - \frac{\mu}{(v+w)}} \, \mathrm{e}^{-\lambda u - \omega(w+u)} \mathrm{d}w \mathrm{d}v \mathrm{d}u}$$

$$= \frac{\int_0^u \int_0^{+\infty} u^\alpha (u-v)^{k\gamma+(k-1)\frac{3}{2}} (v+w)^\gamma \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{u} - \frac{k^2\mu}{u-v} - \frac{\mu}{(v+w)}} \, \mathrm{e}^{-\lambda u - \omega(w+u)} \mathrm{d}w \mathrm{d}v}{\tilde{\Delta}_k}$$

Dílčí distribuce řádu k

Monte Carlo

- dalším krokem bylo nalezení odhadů pravděpodobností Δ_k pomocí Monte Carlo simulace:

$$\text{generování } L \text{ časových světlostí } X \sim \mathrm{GIG}(\alpha, \beta, \lambda)$$
$$\downarrow$$
$$\text{přiřazení akceptačních řádů } k \text{ za předpokladu } Y \sim \mathrm{GIG}(\gamma, \mu, \omega)$$
$$\downarrow$$
$$\text{výpočet výběrových poměrů akceptance } \left(\hat{\Delta}_k\right)_{k=0}^{k_{\max}}$$
$$\downarrow$$
$$\text{celý proces opakujeme } M \text{ krát k ověření přesnosti}$$

Očekávaná vlastnost

Odhady $\hat{\Delta}_k$ jsou nestranné a s rostoucím L se snižuje jejich rozptyl.

Dílčí distribuce řádu k

závěr

- odvození obecného tvaru f_k a Δ_k
- pro GIG rozdělení časových a kritických časových světlostí lze získat pouze odhady $\tilde{f}_k$ a $\tilde{\Delta}_k$, které jsou vlivem konvoluce nepřesné
- návrh získání odhadů $\hat{\Delta}_k$ simulační metodou Monte Carlo
- ověření přesnosti simulačních odhadů $\hat{\Delta}_k$

Závěr

Teoretické aproximace $\tilde{\Delta}_k$ lze nahradit simulačními $\hat{\Delta}_k$, zejména pokud $L > 10\,000$.

Rozdělení kritických světlostí

časové světlosti

- jsou přímo měřitelné
- jejich rozdělení z empiricky naměřených dat získáme standardními statistickými metodami

kritické časové světlosti

- vznikají v podvědomí řidičů
- není je možné detekovat žádnými měřicími prostředky
- v inspiračním článku byla představena metoda, jejíž cílem je nalezení parametrů rozdělení kritických světlostí tak, aby

$$\delta_k \approx \Delta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Rozdělení kritických světlostí

představení metody odhadování

Odhadovací metoda je dvoukroková:

- z dat odhadneme metodou maximální věrohodnosti rozdělení časových světlostí a spočteme výběrové poměry akceptance δ_k pro všechna $k \in \mathrm{N}_0$
- odhady optimálních parametrů rozdělení kritických světlostí získáme jako řešení optimalizační úlohy

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\Theta} \sum_{k=0}^{K} |\delta_k - \hat{\Delta}_k(\theta)|,$$

kde výrazy $\hat{\Delta}_k$ jsou simulační odhady teoretických pravděpodobností Δ_k a θ je vektor parametrů rozdělení kritických světlostí Y

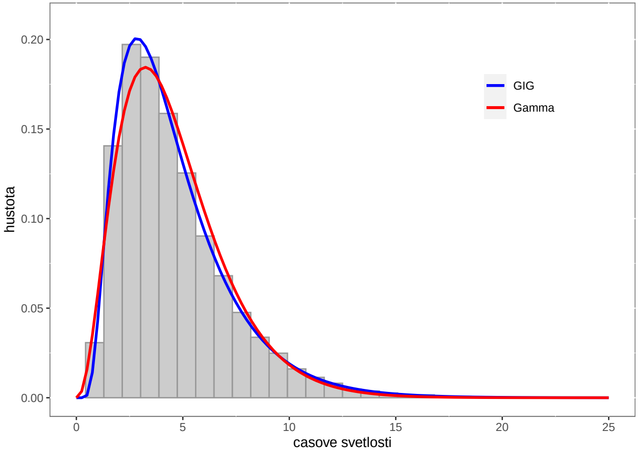
Analýza dopravních dat

parametry časových světlostí

Dataset	Typ rozdělení	Odhady parametrů		
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
Mnichov 1	Gamma	3,402		0,742
	GIG	0,034	3,652	0,464
Mnichov 2	Gamma	3,031		0,546
	GIG	0,006	3,559	0,347
Drážďany	Gamma	2,881		0,443
	GIG	-0,070	3,950	0,279

Analýza dopravních dat

parametry časových světlostí - Mnichov 1



Analýza dopravních dat - Gamma rozdělení

parametry kritických časových světlostí - Mnichov 1

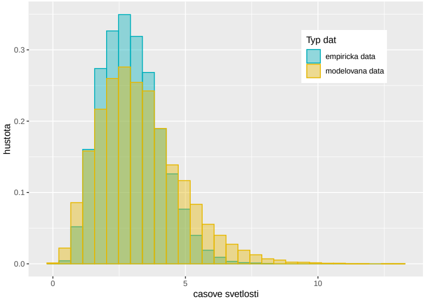
- předpoklad Gamma(γ, ω) rozdělení kritických světlostí

Práce	Odhady parametrů		Střední hodnota
	$\hat{\gamma}$	$\hat{\omega}$	
výzkumný úkol	5,001	0,998	5,011
článek[2]	3,865	1,319	2,930

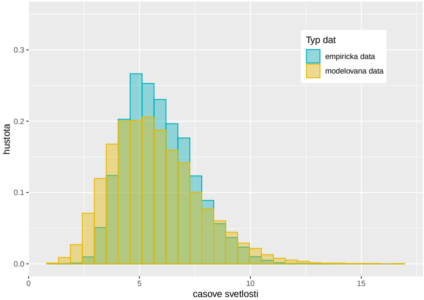
[2] Krbálek, M., Hobza, T. a další, Statistical aspects of gap-acceptance theory for unsignalized intersection capacity. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 594, 2022, 1-19.

Analýza dopravních dat - Gamma rozdělení

výzkumný úkol - Mnichov 1



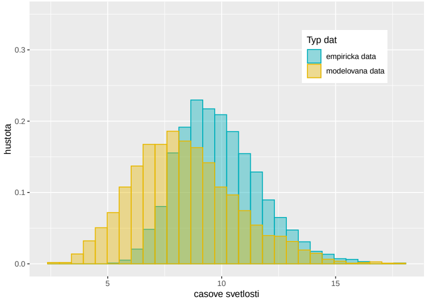
(a) $k = 0$



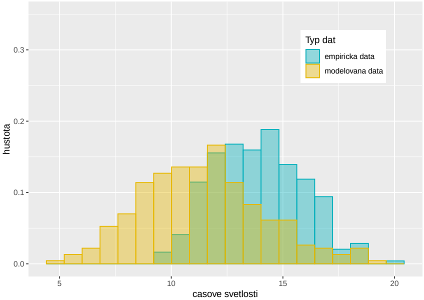
(b) $k = 1$

Analýza dopravních dat - Gamma rozdělení

výzkumný úkol - Mnichov 1



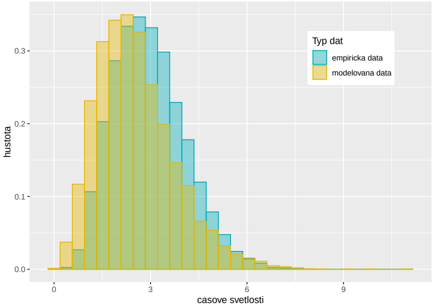
(a) $k = 2$



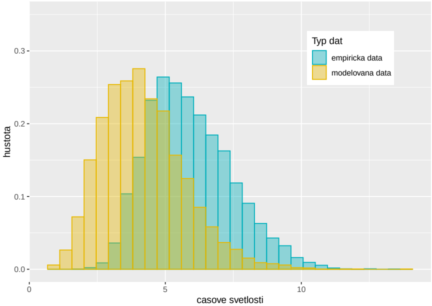
(b) $k = 3$

Analýza dopravních dat - Gamma rozdělení

inspirační článek - Mnichov 1



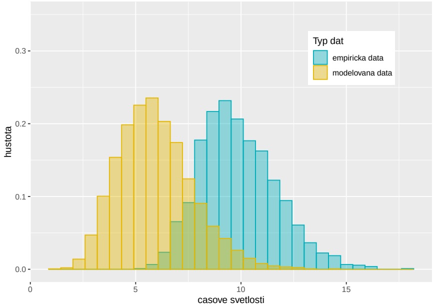
(a) $k = 0$



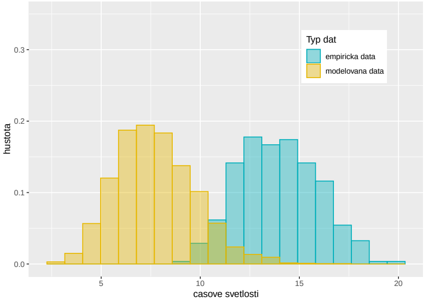
(b) $k = 1$

Analýza dopravních dat - Gamma rozdělení

inspirační článek - Mnichov 1



(a) $k = 2$



(b) $k = 3$

Analýza dopravních dat - GIG rozdělení

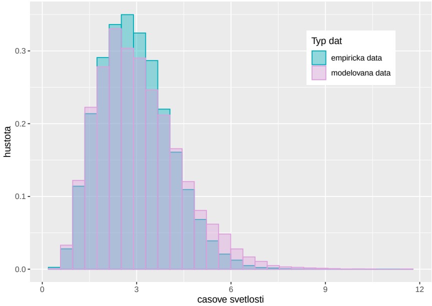
parametry kritických časových světlostí - Mnichov 1

- předpoklad GIG(γ, μ, ω) rozdělení kritických světlostí

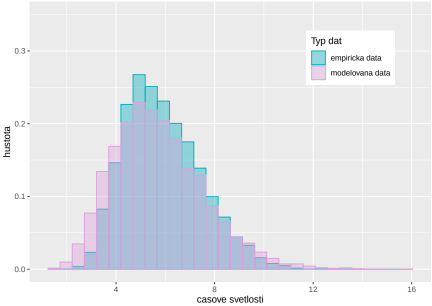
Odhady parametrů			Střední hodnota
$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\omega}$	
5,100	3,965	1,495	4,719

Analýza dopravních dat - GIG rozdělení

Mnichov 1



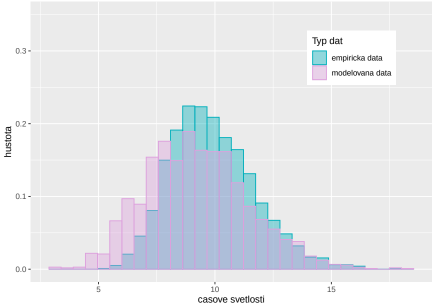
(a) $k = 0$



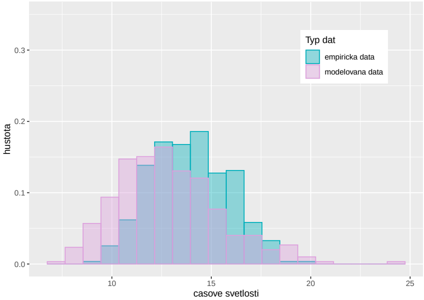
(b) $k = 1$

Analýza dopravních dat - GIG rozdělení

Mnichov 1



(a) $k = 2$



(b) $k = 3$

Závěr

- zpochybnili jsme často užívaný předpoklad Gamma rozdělení časových světlostí a ukázali jsme, že rozdělení GIG se jeví jako vhodnější volba distribuce časových světlostí
- ukázali jsme, že také distribuci kritických časových světlostí je vhodné hledat uvnitř rodiny GIG hustot pravděpodobnosti
- nalezli jsme odhady parametrů kritických světlostí originální metodou poprvé představenou v článku[3]

[3] Krbálek, M., Hobza, T. a další, Statistical aspects of gap-acceptance theory for unsignalized intersection capacity. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 594, 2022, 1-19.

Děkuji za pozornost.