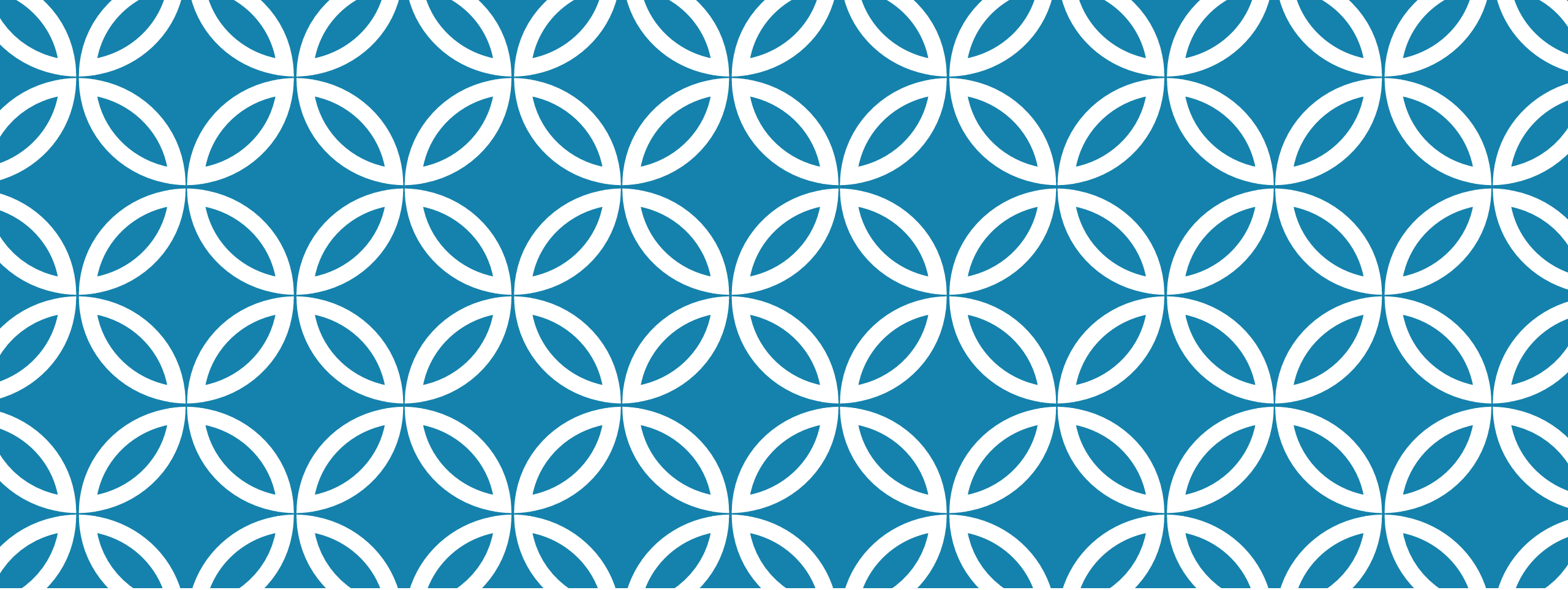


BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ

Albert Cibiček
Nikol Drejčková
Alexander Košťál
Ivan Sova

POJMY

Pevný bod - označuje prvek, který se daným zobrazením zobrazí sám na sebe.

Aproximace - zjednodušený odhad nebo přiblížení. Slouží k nahrazení složitých čísel, funkcí nebo fyzikálních jevů jednodušími tvary.

Kontrahující zobrazení (kontrakce) - jde o zobrazení, u kterého je vzdálenost obrazů menší než vzdálenost vzorů.

VĚTA

- Každé kontrahující zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má právě jeden pevný bod, tj. existuje jediné $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(x) = x$.
- Pevný bod hledáme pomoci posloupnosti $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ která je daná rekurzivním předpisem $x_k = f(x_{k-1})$, kde x_0 je libovolný bod náležící $\mathbb{R}^n$.
- Lze ukázat, že tata posloupnost konverguje k hledanému pevnému bodu s rychlostí alespoň

$$|x_k - x| \leq q^k |x_0 - x|.$$

APROXIMACE Π

- Z rovnice $\sin x = 0$ můžeme vytvořit funkci $f(x) = x + \sin x$, pro kterou je π na intervalu $I = \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ jediným pevným bodem. Nyní stačí ukázat, že f zobrazuje z I do I a že je na I kontrahující.
- Ve skutečnosti dokonce platí nerovnost $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

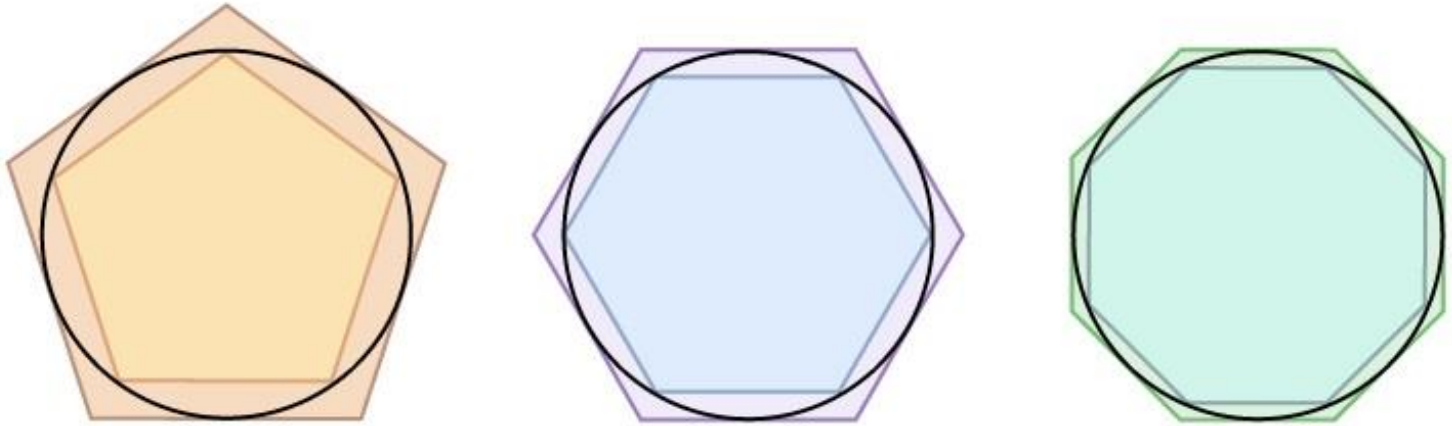
APROXIMACE ČÍSLA Π

- Posloupnost $x_n = f(x_{n-1})$ s $x_0 \in I$ konverguje k π. Následující tabulka ukazuje, že poměrně rychle:

Člen	Hodnota	Počet desetinných míst
x_0	3	0
x_1	3,141 120 008 059…	3
x_2	3,141 592 653 572…	10
x_3	3, 141 592 653 589…	33
x_4	3, 141 592 653 589…	99

JINÉ METODY APROXIMACE Π

- Pomoci Archimédovy metody nalezl Ludolph van Ceulen, po němž se číslu říká Ludolfovo, aproximaci π na 35 desetinných míst. K tomu použil (okolo roku 1600) 2^{62}-úhelník opsaný a vepsaný jednotkové kružnici.

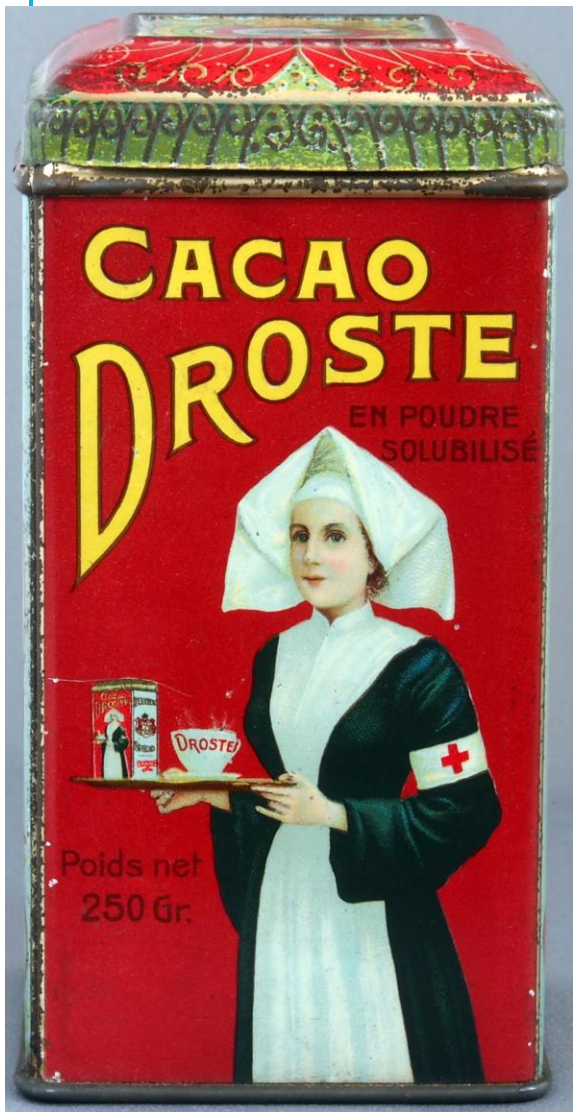


MIZEJÍCÍ BOD OBRAZU

Tzv. *Droste efekt* je jev ve výtvarném umění a ve fotografii. Jde o obrázek, který na nějakém místě obsahuje zmenšeninu sebe sama.

Platí, že každý “obraz v obraze” obsahuje právě jeden bod, který je všem obrazům shodný.

MIZEJÍCÍ BOD OBRAZU



MAPA

- Představte si, že stojíte uprostřed Prahy a máte mapu, která ji zobrazuje.
- V teoretické rovině je každá mapa zobrazením dané oblasti. Toto zobrazení zároveň splňuje předpoklady Banachovy věty o pevném bodě (pokud je měřítko mapy menší než 1:1).
- To znamená, že kdybychom mapu položili na zem, tak právě jeden bod (pevný bod ze znění věty) na mapě bude ležet přesně na místě které vyobrazuje.

PODĚKOVÁNÍ

Na závěr bychom rádi poděkovali organizátorům Týdne vědy na Jaderce, díky nimž se tato akce mohla uskutečnit, a také vedoucímu našeho miniprojektu.

ZDROJE

- https://en.wikipedia.org/wiki/Droste_effect
- https://www.geocaching.com/geocache/GC4411F_zahada-zvana-pi
- https://duvyphotography.medium.com/the-droste-effect-b138b58d406c

Děkujeme za pozornost