Počítačové algebraické systémy a jejich aplikace při zpracování dat a vizualizaci

Kryštof Buršík[1], František Přidal[2]

[1]Gymnázium Ústí nad Orlicí [2]Škola Františka Křižíka

Garant/školitel: doc. Dr. Ing. Milan Šiňor; Katedra laserové fyziky a fotoniky FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt

Tato práce se zabývá praktickým využitím počítačového algebraického systému **Wolfram Mathematica** v oblasti zpracování dat a matematické vizualizace. Text představuje aplikaci statistických metod při analýze datových souborů, implementaci interaktivního modelu složené lichoběžníkové metody pro numerickou integraci a využití iteračních algoritmů pro hledání kořenů funkcí. Cílem je demonstrovat propojení symbolických výpočtů s numerickými přístupy na vybraných příkladech.

Klíčová slova: Počítačové algebraické systémy, Wolfram Mathematica, Vizualizace

1. Teoretický úvod

- **Numerický software vs. CAS:** Tradiční numerický software často trpí akumulací zaokrouhlovacích chyb. Počítačové algebraické systémy (*Computer Algebra Systems*, CAS) naproti tomu pracují symbolicky (uchovávají přesné výrazy jako π či $\sqrt{2}$) a zachovávají si tak absolutní přesnost.
- **Wolfram Mathematica:** Komplexní výpočetní prostředí postavené na jazyce *Wolfram Language*. Kombinuje exaktní symbolické výpočty, silné numerické knihovny a pokročilou vizualizaci do interaktivního prostředí tzv. *Notebooku*.
- **Nízkoúrovňová optimalizace:** Pod kapotou systém využívá vysoce optimalizované C/C++ knihovny (např. GMP pro libovolnou přesnost či MKL pro maticové operace). Díky automatické stromové reprezentaci výrazů a chytré správě paměti zvládá efektivně paralelizovat úlohy i na moderních vícejádrových procesorech (Wolfram, 1996).
- **Wolfram|Alpha:** Prediktivní znalostní vyhledávač, jenž interpretuje dotazy v přirozeném jazyce, provádí nad nimi exaktní výpočty a generuje ucelené odpovědi s vizualizacemi.

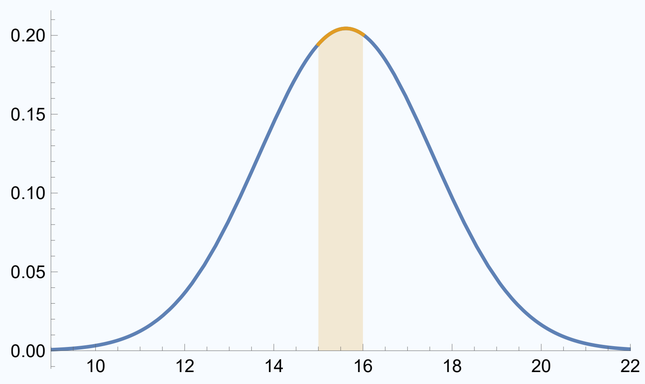
2. Praktické příklady využití

2.1 Analýza věku studentů

V rámci první úlohy jsme analyzovali datový soubor obsahující věk $N = 360$ studentů. Data byla proložena normálním (Gaussovým) rozdělením pravděpodobnosti, jehož hustota je definována vztahem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Pomocí statistických funkcí jsme určili parametry rozdělení a vykreslili histogram překrytý teoretickou Gaussovou křivkou.



Vizualizace rozdělení věku studentů a proložení Gaussovou křivkou.

3. Závěr a Poděkování

Závěr: Tato práce demonstruje, že počítačové algebraické systémy představují mimořádně silný a univerzální nástroj. Propojení symbolických a numerických výpočtů s pokročilou grafickou vizualizací umožňuje efektivně analyzovat a řešit komplexní problémy nejen z oblasti čisté matematiky, ale i z aplikovaných věd.

Poděkování: Rádi bychom poděkovali našemu školiteli doc. Dr. Ing. Milanu Šiňorovi za vedení miniprojektu a organizátorům z FJFI ČVUT v Praze za možnost se zúčastnit.

Zdroje a literatura

WOLFRAM, Stephen. The Mathematica® book. Third edition. Champaign: Wolfram Media, [1996]. ISBN 0-9650532-0-2.

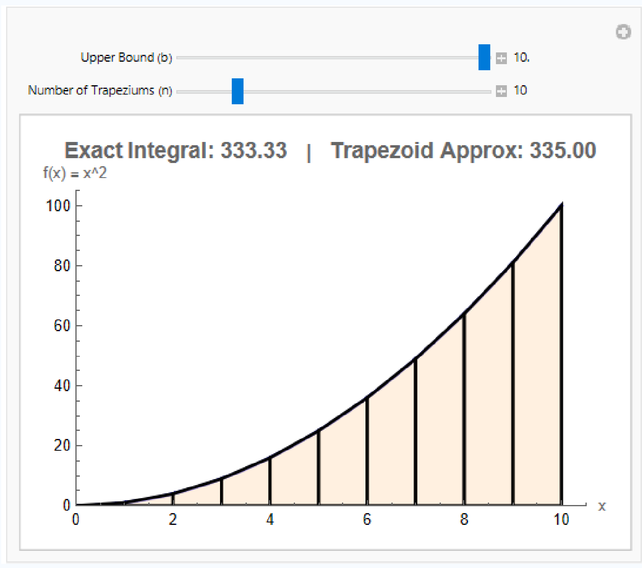
2.2 Interaktivní integrace funkce a analýza chyb

Vizualizace numerické integrace funkce $g(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 10\rangle$ pomocí složené lichoběžníkové metody s dělením na n subintervalů o délce $h = (b-a)/n$:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[g(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(a+ih) + g(b)\right]$$

Pomocí funkce `Manipulate` bylo vytvořeno interaktivní grafické rozhraní, kde lze posuvníkem měnit počet lichoběžníků n. Systém v reálném čase překresluje aproximaci a dopočítává absolutní i relativní odchylku od symbolického výsledku.

Počet lichoběžníků n	Vypočtená hodnota	Absolutní chyba	Relativní chyba
2	375,000	41,667	12,50 %
5	340,000	6,667	2,00 %
10	335,000	1,667	0,50 %
50	333,400	0,067	0,02 %
100	333,350	0,017	0,005 %



2.3 Hledání kořenů Newtonovou-Raphsonovou metodou

Využití iteračních algoritmů k numerickému řešení nelineárních rovnic typu $f(x) = 0$. Metoda tečen zpřesňuje odhad kořene podle rekurentního vztahu:

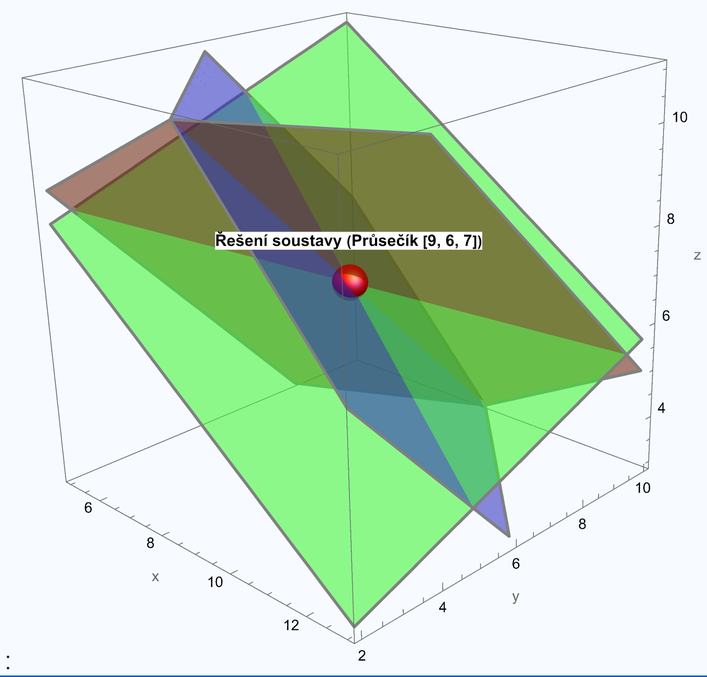
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Výhodou systému je schopnost automaticky a exaktně vyjádřit derivaci funkce $f'(x)$ přímo uvnitř výpočetního cyklu pomocí operátoru `fun'[x]`. Metoda byla úspěšně otestována pro nalezení $\sqrt{50}$.

2.4 Geometrická interpretace řešení soustav rovnic

Soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých definuje tři roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezení jedinečného řešení odpovídá určení přesného bodu, ve kterém se všechny tři roviny protínají (v našem případě bod $[9, 6, 7]$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \\ -17 \end{pmatrix}$$



:

LaTeX TikZposter