

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

Analýza O-C diagramov vybraných
zákrytových dvojhviezd

Obsah

Úvod	2
1 Zákrytové dvojhviezdy	3
2 O-C diagram	5
2.1 Lineárny tvar O-C diagramu	5
2.2 Kvadratický tvar O-C diagramu	6
2.3 Sínusovitý tvar O-C diagramu	7
2.4 Zložitejší tvar O-C diagramu	9
3 Metódy použité na fitovanie O-C diagramov	10
3.1 Genetické algoritmy	11
3.2 Monte Carlo	12
4 Výsledky	14
Záver	17
Literatúra	18
Dodatok	19

Úvod

Skúmanie zákrytových dvojhviezd je nenahraditeľné pri skúmaní hviezd rôznych spektrálnych typov. Kombináciou fotometrických a spektroskopických pozorovaní je možné určiť absolútne parametre zložiek dvojhviezdy; napr.: hmotnosti, polomery a efektívne teploty oboch hviezd. Na základe týchto meraní je následne možné kalibrovať rôzne nepriame spôsoby určovania parametrov hviezd.

Začiatky skúmania zákrytových dvojhviezd spadajú do 17. až 18. storočia. V roku 1640 objavil G. Montanari premennosť hviezdy Algol. Zmeny jej jasnosti vysvetlil v roku 1783 J. Goodricke zákrytmi zložiek dvojhviezdneho systému. Túto hypotézu dokázal koncom 19. storočia E. Pickering.¹ V súčasnosti je známych približne 12000 zákrytových dvojhviezd, čo tvorí 15% zo všetkých známych premenných hviezd v katalógu GCVS (Samus et al., 2009). Najviac známych zákrytových dvojhviezd je typu Algol (5474), typu W UMa (3081) a najmenej typu β Lyrae (1437), zvyšné zákrytové dvojhviezdy nemajú zatiaľ určený typ.

Pomocou presného určovania časov miním zákrytovej dvojhviezdy je možné objaviť ďalšie fyzikálne javy, ktoré v systéme existujú. Najčastejšími z nich sú prenos hmoty medzi zložkami dvojhviezdy a efekty spôsobené prítomnosťou ďalšieho telesa (príp. ďalších telies) v systéme. Skúmanie týchto efektov sa zvyčajne realizuje analýzou tzv. O-C diagramov.

Cieľom tejto práce je analýza O-C diagramov vybraných zákrytových dvojhviezd. Na fitovanie O-C diagramov som využil netradičné optimalizačné metódy, ktorých použitie sa ukázalo byť veľmi vhodné. Zvolený postup fitovania O-C diagramov bol prvýkrát použitý v tejto práci. Získané výsledky som porovnal s hodnotami publikovanými v odborných časopisoch.

¹https://www.aavso.org/vsots_betaper

1 Zákrytové dvojhviezdy

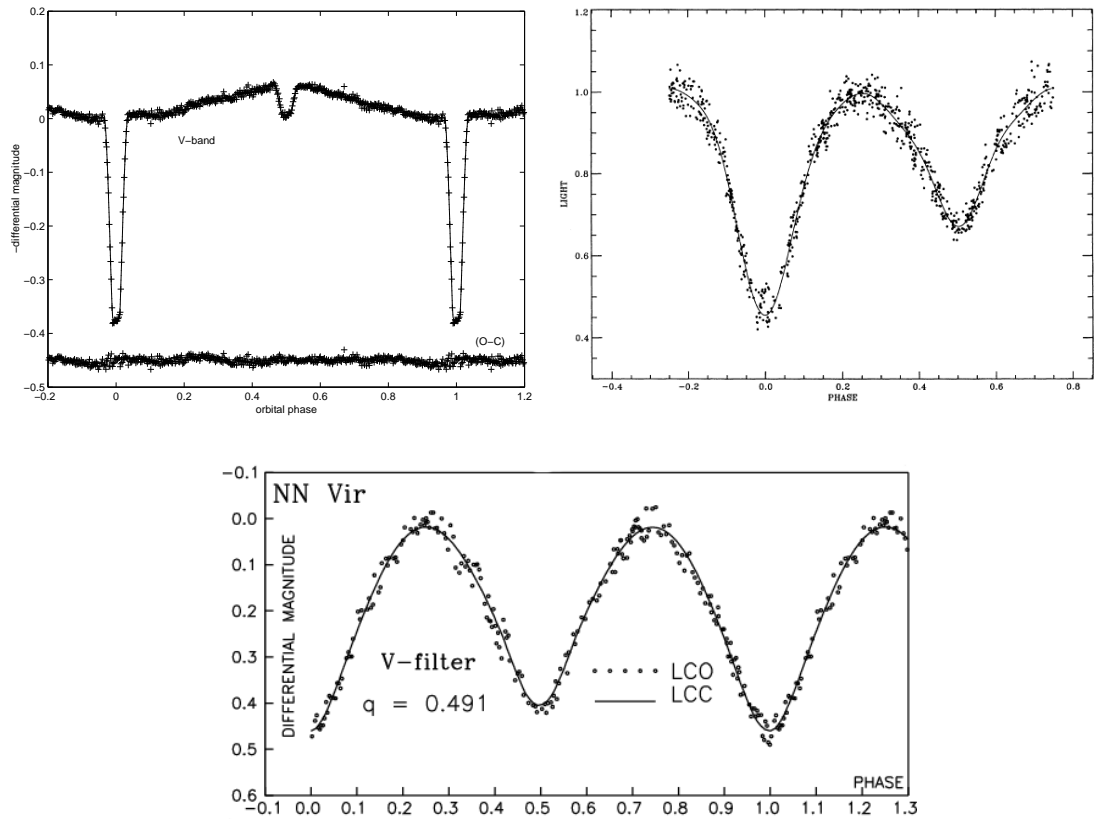
Zákrytové premenné hviezdy sú typom geometrických premenných hviezd, pri ktorých sú zmeny jasnosti spôsobené vzájomným zakrývaním zložiek dvojhviezdy. K zákrytovým dvojhviezdam sa často radia aj extrasolárne planetárne sústavy, kde jasnosť materskej hviezdy poklesne počas tranzitu exoplanéty. K zákrytom dochádza iba pri vhodnej orientácii roviny dráhy vzhľadom k pozorovateľovi. Sklon dráhy musí byť blízky 90° .

V závislosti od veľkosti a svietivosti zložiek vo vybranej spektrálnej oblasti sa pozorujú primárne, prípadne aj sekundárne zákryty. Počas zákrytov dochádza k poklesu jasnosti dvojhviezdy. Za primárny zákryt sa považuje zakrytie primárnej zložky, ktorá je väčšinou väčšia a svietivejšia, menšou a menej svietivou sekundárnou zložkou. Pri sekundárnom zákryte je situácia opačná. V prípade, že je primárna zložka omnoho jasnejšia ako sekundárna, nemusia byť sekundárne zákryty pozorovateľné.

Tvar svetelnej krivky zákrytovej dvojhviezdy je určený hlavne tvarom a jasnosťou zložiek. Ukážky svetelných kriviek zákrytových dvojhviezd sú na Obr. 1. Na základe tvaru svetelnej krivky možno zákrytové premenné rozdeliť do troch skupín:

- **typ Algol (EA)** - minimá sú relatívne úzke. Primárne minimum je pomerne výrazné, sekundárne minimum je plytšie alebo vôbec nepozorovateľné. Mimo zákrytov je jasnosť viacmenej konštantná, prípadné zmeny jasnosti súvisia s efektom odrazu a asférickosťou zložiek. Ide väčšinou o oddelený systém s oboma zložkami približne sférického tvaru. Periódy sú dlhé.
- **typ β Lyrae (EB)** - minimá sú širšie, jasnosť sa výrazne mení aj mimo zákrytov. Hĺbka miním je rozdielna. Systém je tvorený hviezdami spektrálnych typov B alebo A. Zložky sú silne deformované, eliptického tvaru. Pričom primárna zložka môže vyplňať svoj Rocheho lalok. Potom ide o tzv. polodotykový systém, kde dochádza k výraznému prenosu hmoty z primárnej zložky na sekundárnu. Periódy sú rádovo niekoľko dní.
- **typ W Ursae Majoris (EW)** - na svetelnej krivke v podstate nie je možné

presne určiť začiatok a koniec zákrytu. Jasnosť sa kontinuálne mení. Minimá sú takmer rovnako hlboké. Obe zložky sú silne deformované a vyplňajú svoj Rocheho lalok a vytvárajú tak jednu spoločnú obálku. Ide o dotykový systém s periódami do jedného dňa.



Obr. 1: Ukážky svetelných kriviek zákrytových dvojhviezd. Vľavo hore typ Algol (Hilditch et al., 2003), vpravo hore typ β Lyr (Van Hamme et al., 1995) a dole typ W UMa (Djurašević et al., 2004).

2 O-C diagram

Pri pozorovaní zákrytových premenných hviezd dochádza k zákrytom väčšinou periodicky. Je teda možné vypočítať čas, kedy zákryty nastávajú:

$$C \equiv T_C = T_0 + PE , \quad (1)$$

kde T_0 (niekedy značený aj M_0) je čas referenčného minima, P je perióda a E je epocha. Epocha udáva počet miním, ktoré nastali od času referenčného minima. Zvyčajne sa za referenčné minimum berie primárne minimum. Primárne minimá potom nastávajú v celočíselnej epoche a sekundárne minimá v poločíselnej (napr. 0,5) epoche. Tento model pre výpočet časov zákrytov sa nazýva lineárna efemerida.

Zákryty sú pozorované v čase $O \equiv T_O$, ktorý je vo všeobecnosti iný ako čas T_C prislúchajúci danej epoche. Ich rozdiel môže byť spôsobený rôznymi fyzikálnymi aj nefyzikálnymi príčinami. Najjednoduchšie je tieto príčiny analyzovať na grafe závislosti rozdielu časov miním od epochy (resp. čase minima), tento graf sa nazýva **O-C diagram**.

2.1 Lineárny tvar O-C diagramu

Najjednoduchší model O-C možno získať zdefinovaním pozorovaného času minima podobne ako v rovnici (1):

$$O \equiv T_O = T_0^* + P^* E , \quad (2)$$

kde T_0^* a P^* je reálny čas referenčného minima a reálna perióda. Rozdielom tejto rovnice a rovnice (1) získame lineárny model O-C:

$$O - C = \Delta T_0 + \Delta PE , \quad (3)$$

kde ΔT_0 a ΔP je chyba určenia času základného minima, resp. periódy v rovnici (1). O-C diagram je podľa tohto modelu priamka. Ak O-C diagram skúmanej zákrytovej dvojhviezdy má lineárny tvar, znamená to, že perióda systému je len jedna a nijako sa

nemení. Prípadný nenulový rozdiel O-C je iba dôsledok nesprávne vypočítanej lineárnej efemeridy.

Na základe hodnôt ΔT_0 a ΔP môžu nastať 4 prípady:

1. $\Delta T_0 = \Delta P = 0$

O-C diagram je vodorovná priamka prechádzajúca cez bod $O - C = 0$. Perióda a čas základného minima sú správne určené a žiadna ich korekcia nie je nutná.

2. $\Delta T_0 \neq 0, \Delta P = 0$

O-C diagram je vodorovná priamka neprechádzajúca cez bod $O - C = 0$, ale cez bod $O - C = \Delta T_0$. Perióda je správne určená, ale čas referenčného minima je nutné opraviť o hodnotu ΔT_0 .

3. $\Delta T_0 = 0, \Delta P \neq 0$

O-C diagram je šikmá priamka prechádzajúca cez bod $O - C = 0$. Čas základného minima je správne určený. Períodu je potrebné opraviť o hodnotu ΔP , ktorá je daná smernicou danej priamky.

4. $\Delta T_0 \neq 0, \Delta P \neq 0$

O-C diagram je šikmá priamka prechádzajúca cez bod $O - C = \Delta T_0 \neq 0$. Ide vlastne o kombináciu prípadov 2 a 3. Je nutné opraviť periódu aj čas základného minima.

2.2 Kvadratický tvar O-C diagramu

Kvadratický model O-C je založený na pridaní ďalšieho (kvadratického) člena do rovnice (2):

$$O \equiv T_O = T_0^* + P^*E + QE^2 \quad (4)$$

Tento model sa zvykne nazývať kvadratická efemerida. V prípade kombinácie z lineárnym O-C získame kvadratický model O-C:

$$O - C = \Delta T_0 + \Delta PE + QE^2 \quad (5)$$

O-C diagramom je parabola. Kvadratický tvar O-C diagramu skúmanej zákrytovej dvojhviezdy súvisí s lineárnou zmenou periódy systému. Konvexný tvar paraboly na O-C diagrame znamená predlžovanie periódy. Naopak, konkávny tvar paraboly je zapríčinený skracovaním periódy systému.

Lineárna zmena periódy je väčšinou spôsobená prenosom hmoty. Pri prenose hmoty medzi zložkami dvojhviezdy môže dochádzať k skracovaniu aj k predlžovaniu periódy. Ak je donorom hmoty primárna zložka, perióda sa skracuje. Naopak, perióda sa predlžuje, ak sa hmota prenáša z menej hmotnej zložky na hmotnejšiu. Ak hmota uniká zo systému cez libračný bod L_2 alebo L_3 , perióda sa vždy skracuje.

2.3 Sínusovitý tvar O-C diagramu

O-C diagram podobný sínusoide môže byť spôsobený rozličnými efektami. Sínusovitý tvar znamená prítomnosť ďalšieho (tretieho) telesa v systéme.

Väčšinou sa uvažuje zmena na O-C diagrame spôsobená tzv. Light-Time efektom (LiTE). Zákrytová dvojhviezda obieha okolo ťažiska celého (trojhviezdneho) systému. Tým sa periodicky mení vzdialenosť medzi dvojhviezdou a pozorovateľom v čase zákrytu. V kombinácii s konečnou rýchlosťou svetla sa mení aj čas, keď je pozorovaný zákryt. O-C primárnych a sekundárnych miním sú pri modeli LiTE vo fáze. Model O-C diagramu ovplyvnený LiTE možno vyjadriť vzťahom (Irwin, 1952):

$$O - C = \frac{a_{12} \sin i_3}{c} \left[\frac{1 - e_3^2}{1 + e_3 \cos \nu_3} \sin(\nu_3 + \omega_3) + e_3 \sin \omega_3 \right], \quad (6)$$

kde a_{12} je veľká poloos dráhy dvojhviezdy okolo ťažiska trojhviezdneho systému, i_3 je sklon dráhy tretieho telesa, e_3 je excentricita jeho dráhy, ν_3 je pravá anomália tretieho telesa a ω_3 je dĺžka pericentra dráhy tretieho telesa.

Pravá anomália ν udáva polohu telesa na dráhe, je teda funkciou času. Výpočet pravej anomálie v danom čase, ale nie je triviálny. Pravú anomáliu je možné vypočítať z excentrickej anomálie E pomocou vzťahu:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (7)$$

Vzťah excentrickej anomálie E a strednej anomálie M udáva Keplerova rovnica:

$$E - e \sin E = M \quad (8)$$

Stredná anomália je už jednoduchou funkciou času t :

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau) , \quad (9)$$

kde P je perióda telesa a τ je čas prechodu pericentrom.

Samotný model LiTE je výrazne zložitejší ako lineárny a kvadratický model. Z rovnice (6) je zrejmé, že parametre a_{12} a i_3 nemožno len na základe skúmania O-C diagramu určiť oddelene. Preto sa určuje parameter $a_{12} \sin i_3$. Model LiTE má teda 5 voľných parametrov, ktoré je potrebné pri fitovaní určiť; sú to: $a_{12} \sin i_3$, e_3 , ω_3 , P_3 , τ_3 .

Z dôvodu spomínanej degenerácie medzi a_{12} a i_3 sa nedá určiť hmotnosť tretieho telesa. Je možné určiť len funkciu hmotnosti, ktorá je v definovaná vzťahom:

$$f(M_3) = \frac{(M_3 \sin i_3)^3}{\mathcal{M}^2} , \quad (10)$$

kde \mathcal{M} je hmotnosť celého systému; t.j. pre trojhviezdny systém $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^3 M_i$. Dá sa ukázať, že funkciu hmotnosti tretieho telesa možno vyjadriť z parametrov modelu LiTE vzťahom:

$$f(M_3) = \frac{(a_{12} \sin i_3)^3}{P_3^2} \quad (11)$$

Model LiTE sa dá využiť aj pri objavovaní exoplanét. Metóda Eclipse Timing Variations (ETV) je založená priamo na LiTE efekte pri zákrytových dvojhviezdach, pričom tretím telesom v systéme nie je ďalšia hviezda, ale exoplanéta. Amplitúda sínusovitých zmien na O-C diagrame je veľmi malá, napriek tomu bolo touto metódou objavených 8 exoplanét². Ďalším spôsobom detekcie exoplanét na základe analýzy O-C diagramu je metóda Transit Timing Variations (TTV). Pri metóde TTV sa skúmajú posuny časov tranzitu známej exoplanéty popred materskú hviezdu. Vplyv ďalšej exoplanéty v systéme sa prejaví tvarom O-C diagramu podobnému O-C diagramu pri LiTE. Vďaka veľmi presnej fotometrii s pomerne dobrým časovým rozlíšením, ktorú poskytla družica Kepler, bolo touto metódou objavených 15 exoplanét² a pri mnohých sústavách s viacerými exoplanétami boli pomocou metódy TTV získané hmotnosti týchto planét.

²údaj k 25.3.2016 zo stránky: http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/counts_detail.html

2.4 Zložitejší tvar O-C diagramu

V praxi ide častokrát o kombináciu rôznych efektov na O-C diagrame. To celkovú analýzu O-C diagramov značne komplikuje. Pozorujú sa napríklad zákrytové dvojhviezdy s prenosom hmoty medzi zložkami, ktoré sú súčasťou štvorhviezdneho systému. O-C diagram má tvar paraboly, ktorá je deformovaná dvoma sínusovkami. Celkový model s 13 voľnými parametrami sa dá kombináciou vzťahov (5) a (6) vyjadriť rovnicou:

$$O - C = \Delta T_0 + \Delta PE + QE^2 + \frac{a_{12} \sin i_3}{c} \left[\frac{1 - e_3^2}{1 + e_3 \cos \nu_3} \sin(\nu_3 + \omega_3) + e_3 \sin \omega_3 \right] + \frac{a_{123} \sin i_4}{c} \left[\frac{1 - e_4^2}{1 + e_4 \cos \nu_4} \sin(\nu_4 + \omega_4) + e_4 \sin \omega_4 \right], \quad (12)$$

kde parametre s indexom 4 zodpovedajú parametrom štvrtého telesa, a_{12} je veľká poloos dráhy zákrytovej dvojhviezdy okolo spoločného ťažiska dvojhviezdy a tretieho telesa, a_{123} je veľká poloos dráhy tohto ťažiska okolo ťažiska celého štvorhviezdneho systému.

3 Metódy použité na fitovanie O-C diagramov

Cieľom analýzy O-C diagramov je určiť presné hodnoty periódy dvojhviezdy a času referenčného zákrytu, t.j. lineárnu efemeridu, prípadne analyzovať ďalšie efekty ovplyvňujúce O-C diagram ako je prenos hmoty medzi zložkami dvojhviezdy alebo prítomnosť iných telies v systéme.

V prípade, že O-C diagramy vykazujú lineárny alebo kvadratický trend, fitovanie nie je problematické a je možné využiť bežne používané metódy lineárnej regresie (detaily napr. v Mikulášek&Zejda (2013)). Naopak, fitovanie O-C diagramu ovplyvneného LiTE efektov alebo kombináciou viacerých efektov je oveľa komplikovanejšie. Použitie bežných fitovacích algoritmov je takmer nemožné. Preto som v tejto práci využil dva netradičné fitovacie algoritmy, ktoré sú stručne opísané v nasledujúcich podkapitolách. Celé spracovanie O-C diagramov bolo vykonané pomocou vlastného programu v programovacom jazyku python. Na fitovanie pomocou genetických algoritmov bolo potrebné napísať vlastnú triedu. Fitovanie metódou Monte Carlo je veľmi dobre implementované v knižnici pymc. Celkový postup fitovania O-C diagramov bol prvýkrát použitý v tejto práci. Jeho detailný popis bude uvedený v samostatnom článku Gajdoš et al. (2016).

Časy miním na vytvorenie O-C diagramov boli získané z O-C brány Českej astronomickej spoločnosti³, kde sú k dispozícii časy miním veľkého počtu zákrytových dvojhviezd. Tieto merania boli vykonávané rôznymi pozorovateľmi rozličnými prístrojmi a záznamovou technikou v priebehu takmer 100 rokov. Preto je nutné rôznym pozorovacím technikám priradiť rôzne váhy. V tejto práci boli váhy w nastavené nasledovne:

- vizuálne pozorovania: $w = 1$
- fotografické pozorovania: $w = 3$
- fotoelektrické pozorovania: $w = 5$
- CCD pozorovania: $w = 10$

Tieto váhy sú brané do úvahy pri výpočte chyby štvorcov χ^2 , ktorá sa využíva pri

³<http://var2.astro.cz/ocgate/index.php?lang=cz>

oboch použitých fitovacích algoritmoch, a taktiež boli váhy znázornené vo výsledných O-C diagramoch pomocou veľkosti jednotlivých bodov. Chyba χ^2 sa vypočíta pomocou vzťahu:

$$\chi^2 = \sum_i ((x_i - \mu_i)w_i)^2, \quad (13)$$

kde x_i je nameraná hodnota, μ_i je hodnota predpovedaná na základe modelu.

3.1 Genetické algoritmy

Genetické algoritmy (GA) sa často používajú na rôzne optimalizačné problémy, ktoré sa nedajú riešiť alebo sú veľmi komplikované na riešenie pomocou klasických metód optimalizácie. Ich veľkou výhodou je, že limitne vždy konvergujú ku globálnemu optimu, pričom nie je nutné zadať žiadne počiatočné hodnoty parametrov modelu. Zadávajú sa len hranice optimalizovaných parametrov.

Princípy genetických algoritmov vychádzajú z princípov biologickej evolúcie v prírode (Weise, 2011). Tie je možno vo všeobecnosti zapísať v niekoľkých bodoch:

- existuje populácia jedincov
- existuje variabilita vlastností jedincov
- jedince s rôznymi vlastnosťami majú rôznu reprodukčnú úspešnosť
- vlastnosti potomkov sú korelované s vlastnosťami rodičov

Reprodukčná úspešnosť sa určuje na základe tzv. Objective Function alebo fitness, ktorá je v prípade fitovania dát určitým modelom totožná s χ^2 chybou. Častokrát nie je veľmi vhodné určovať reprodukčnú schopnosť priamo na základe hodnôt fitness, môže totiž dojsť k predčasnej alebo naopak príliš pomalej konvergencii. Bežne sa ako miera reprodukčnej úspešnosti jedinca používa tzv. lineárny ranking. Reprodukčná schopnosť nie je úmerná hodnote fitness, ale poradiu jedinca v populácii zoradenej podľa hodnôt fitness. Jedným z možných schém na výpočet rankingu je ranking s využitím selekčného tlaku (Razali&Geraghty, 2011) pomocou vzťahu:

$$Rank(i) = 2 - SP + \left(2(SP - 1) \frac{i - 1}{n - 1} \right), \quad (14)$$

kde n je celkový počet jedincov v populácii a SP je selekčný tlak. Zistil som, že pri fitovaní O-C diagramov je optimálna hodnota selekčného tlaku $SP = 2$.

Pri použití GA na fitovanie dát sa zvykne nová generácia jedincov vytvárať z pôvodnej krížením podľa reprodukčnej schopnosti jedincov. Samotné kríženie sa v tomto prípade realizuje prehodením hodnôt niekoľkých parametrov medzi dvojicou vybraných jedincov v populácii. Podobne ako v biologickej evolúcii, môže dôjsť pri vytváraní novej generácie k mutáciám. Hodnoty parametrov určitej časti populácie sa pri mutácii zmenia o náhodnú hodnotu z gaussovského rozdelenia. Zistil som, že pri fitovaní O-C diagramov je vhodné použiť podiel mutácii na úrovni 50%.

Optimalizácia pomocou GA ďalej vyžaduje zadanie dvoch dôležitých parametrov genetických algoritmov, sú to počet generácií a veľkosť populácie v jednej generácii. Fitovanie pomocou GA slúži na prvotný odhad hodnôt parametrov modelu O-C. Na dosiahnutie konvergenzie fitovania je potrebné použiť počet generácií $\gtrsim (100 - 200) \times \text{počet voľných parametrov}$, každá generácia s veľkosťou $\gtrsim (100 - 200) \times \text{počet voľných parametrov}$. V tejto práci som použil genetické algoritmy s pevne nastaveným počtom generácií aj veľkosť populácie; obe boli rovné 1000. Konvergenzia bola dosiahnutá pri všetkých skúmaných O-C diagramoch.

3.2 Monte Carlo

Metóda Monte Carlo (MC) sa bežne používa v štatistickej a kvantovej fyzike (Žukovič, 2015). Ide o stochastickú metódu založenú na generovaní náhodných čísel z uniformného rozdelenia s cieľom dosiahnuť gaussovské rozdelenie stavov. Na to sa zvykne využívať Metropolisov algoritmus, ktorý generuje Markovovský reťazec stavov. Podľa toho sa samotná metóda zvykne nazývať Markov chain Monte Carlo (MCMC).

V súčasnosti sa MCMC začína často používať aj na riešenie optimalizačných úloh a fitovanie komplikovaných modelov. V algoritme MCMC sa vygeneruje nový stav z pôvodného stavu pridaním malej náhodnej zmeny. Ak je χ^2 chyba nového stavu menšia ako chyba pôvodného stavu bezpodmienečne sa prijme nový stav, inak sa akceptuje

s pravdepodobnosťou $\exp(-\Delta\chi^2)$, kde $\Delta\chi^2$ je rozdiel χ^2 chýb medzi starým a novým stavom.

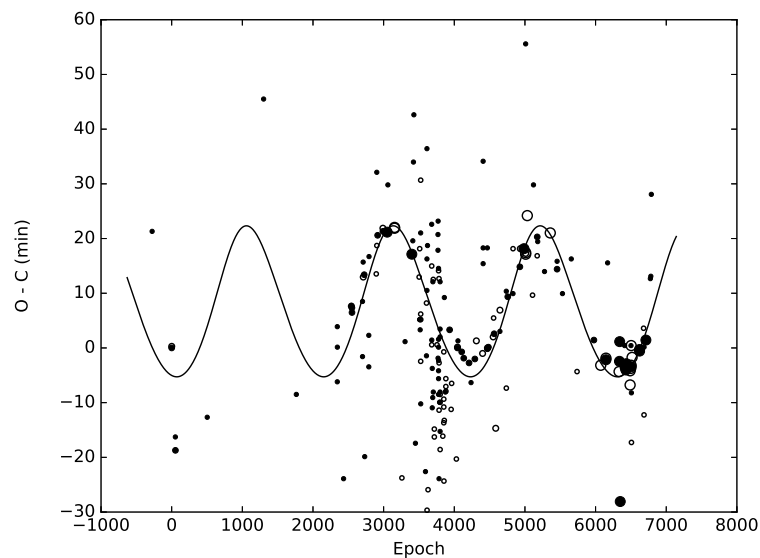
Hlavným cieľom fitovania pomocou MCMC je získanie hodnôt parametrov modelu spolu s ich chybami. Metóda MCMC je iteračná, pričom je potrebné použiť veľký počet iterácií. Rovnovážny stav sa dosiahne až po určitom počte iterácií, hodnoty potrebné na výpočet stredných hodnôt parametrov a ich chýb sa začnú ukladať až po dosiahnutí rovnovážneho stavu. Jednotlivé po sebe idúce stavy sú často výrazne korelované, čo vnáša chybu do vypočítaných hodnôt parametrov a ich chýb. Túto korelovanosť je možné odstrániť binovaním získaných stavov.

Pri fitovaní O-C diagramov som zistil, že na dosiahnutie dostatočne presných hodnôt parametrov modelu O-C aj ich chýb postačuje 10^6 MCMC krokov. Keďže štartovacie hodnoty do MC boli získané pomocou GA, rovnovážny stav bol dosiahnutý takmer hneď na začiatku. Pre istotu, som začal ukladať hodnoty až po 10^3 iteráciách, vtedy bol už určite dosiahnutý rovnovážny stav. Medzi jednotlivými stavmi je taktiež mierna korelácia, tú som odstránil použitím binningu s veľkosťou 10 stavov.

4 Výsledky

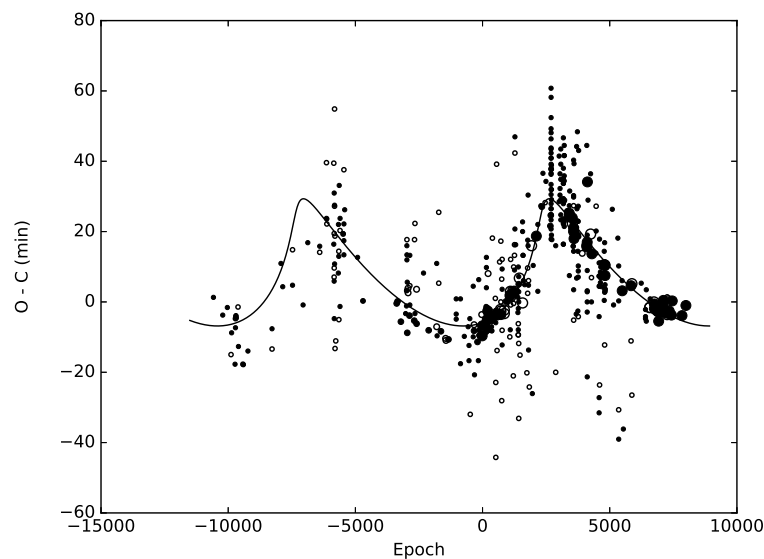
Zo stránky O-C brány Českéj astronomickéj společnosti⁴ som vybral 4 zákrytové dvojhviezdy, pri ktorých je výrazný LiTE efekt. O-C diagramy týchto dvojhviezd som nafitoval pomocou vyššie opísaných fitovacích metód. Zvolené O-C diagramy nevykazovali lineárny trend spôsobený zle určenou periódu, preto ju nebolo potrebné fitovať. Vo všetkých prípadoch, bol zle určený čas základného minima. V jednom prípade (XY Leo) majú O-C kvadratický priebeh. Preto bolo nutné na fitovanie vybraných O-C diagramov použiť komplexný model O-C vyjadrený rovnicou (12), avšak bez 4. telesa. Bohužiaľ, vhodný O-C diagram, kde by bol viditeľný aj vplyv 4. telesa sa mi nepodarilo nájsť.

O-C diagramy vybraných zákrytových dvojhviezd som vykreslil spoločne s modelovými O-C získanými z fitu. Jednotlivé pozorovania miním sú v diagrame odlíšené na základe váhy pozorovania (veľkosť bodov v diagrame) a podľa typu pozorovaného minima (primárne - plný krúžok, sekundárne - prázdny krúžok). Získané parametre skúmaných systémov sú uvedené v tabuľkách spolu s parametrami publikovanými v literatúre v časti Dodatok.



Obr. 2: O-C diagram AR Aur.

⁴<http://var2.astro.cz/ocgate/index.php?lang=cz>



Obr. 3: O-C diagram TX Her.

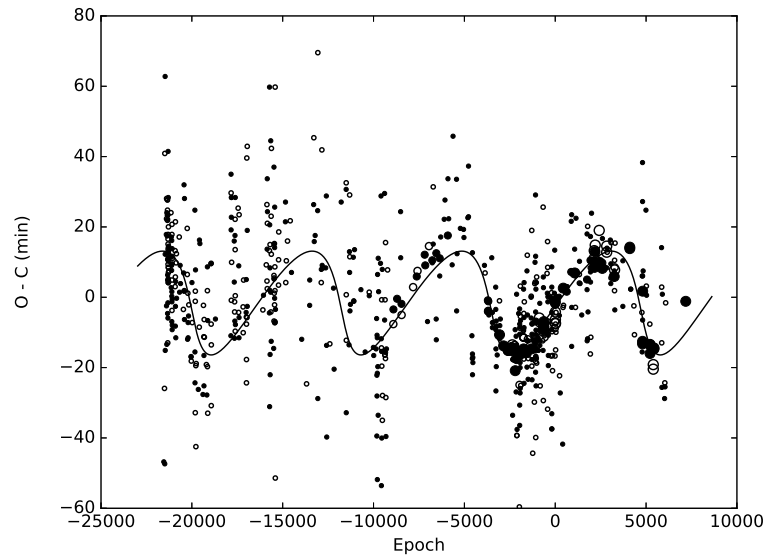
Zákrytová dvojhviezda AR Aur je tvorená dvojicou hviezd hlavnej postupnosti spektrálneho typu B9,5. Ide o zákrytovú dvojhviezdu typu Algol. O-C diagram je na Obr. 2. Perióda tretieho telesa v systéme je 23,5 rokov. Funkcia hmotnosti je 0,0083. Keďže excentricita jeho dráhy je malá (0,15), je výrazná korelácia medzi ω_3 a τ_3 . Preto sú aj chyby určenia týchto parametrov pomerne veľké. Všetky parametre systému sú uvedené v Tab. 1.

TX Her, zákrytová dvojhviezda typu Algol, je tvorená dvomi hviezdami hlavnej postupnosti spektrálneho typu A9 s obežnou periódou približne 2 dni. Tretie teleso obieha dvojhviezdu po excentrickej dráhe ($e = 0,76$) s periódou takmer 54 rokov. Výsledný O-C diagram je na Obr. 3, parametre systému sú v Tab. 2.

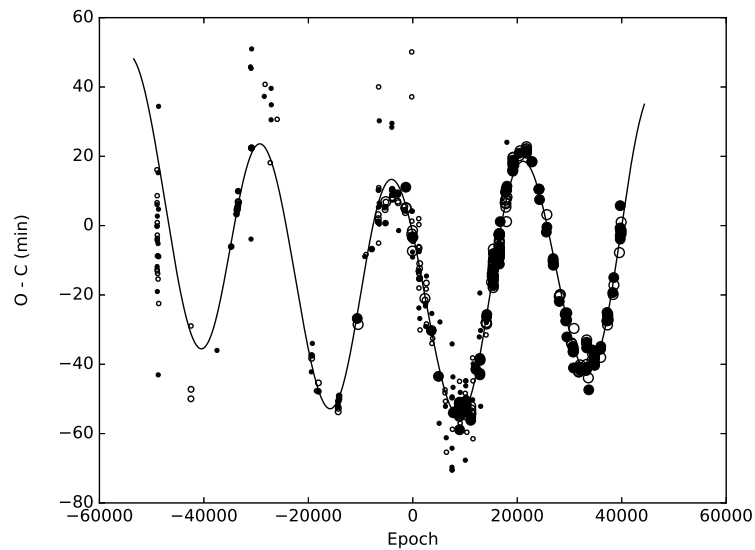
Premenná hviezda U Oph je ďalšou zákrytovou dvojhviezdou typu Algol. Dvojica hviezd hlavnej postupnosti spektrálneho typu B3 obieha okolo spoločného ťažiska s periódou 1,6 dňa. Prítomnosť tretieho telesa v systéme spôsobuje zmeny na O-C diagrame s periódou 37,8 rokov, čo je jasne viditeľné na Obr. 4. V Tab. 3 je súhrn všetkých parametrov systému U Oph.

Zákrytová premenná hviezda XY Leo je dotyková dvojhviezda typu W UMa tvorená malými hviezdami hlavnej postupnosti spektrálneho typu K0. Keďže ide o doty-

kovú dvojhviezdu, prenos hmoty medzi zložkami nie je vôbec prekvapujúci. Na základe získaných parametrov systému (Tab. 4) je kvadratický člen Q rovný $8.5 \cdot 10^{-12}$ dňa. O-C diagram (Obr. 5) má výrazný parabolický tvar, ktorý je navyše ovplyvnený LiTE efektom spôsobeným tretím telesom. Ide pravdepodobne o teleso porovnateľnej hmotnosti ako hviezdy tvoriace samotnú dvojhviezdu. Jeho funkcia hmotnosti je 0,19 a okolo ťažiska celého trojhviezdneho systému obehne za 19,4 rokov.



Obr. 4: O-C diagram U Oph.



Obr. 5: O-C diagram XY Leo.

Záver

Zvolené fitovacie algoritmy poskytujú dobré výsledky a to bez znalostí akýchkoľvek štartovacích hodnôt (GA). To je obrovská výhoda oproti bežne používaným metódam na fitovanie O-C diagramov (napr. nelineárna regresia), ktoré sú častokrát veľmi citlivé na zadané štartovacie hodnoty. Pri použití genetických algoritmov stačí zadávať hranice, v ktorých sa majú hodnoty parametrov hľadať, a tie je možné odhadnúť priamo z O-C diagramu aj s istou rezervou. Na druhej strane, GA neposkytujú žiadne informácie o chybách určených parametrov.

Tento problém som odstránil následným fitovaním O-C diagramov pomocou Monte Carla. MCMC metóda dáva reálne odhady chýb parametrov na základe gaussovskej distribúcie hodnôt parametrov získaných v priebehu fitovania. Získané chyby nezávisia od rozsahu zadaných váh jednotlivých bodov, čo je veľká nevýhoda pri použití nelineárnej regresie. Metóda MCMC požaduje určité štartovacie hodnoty parametrov modelu, tie som ale získal z fitovania pomocou GA.

Modelové krivky O-C zodpovedajú napozorovaným hodnotám. Získané hodnoty sú podobné hodnotám publikovaným v odbornej literatúre. Chyby ich určenia sú mierne väčšie, čo pravdepodobne súvisí so spôsobom ich určovania. Pomerne veľké chyby som získal pre τ_3 a ω_3 pri hviezde AR Aur, čo zrejme súvisí s ich veľkou koreláciou v prípade takmer kruhovej dráhy a taktiež menšieho počtu bodov na O-C diagrame pre túto dvojhviezdu.

Celkové χ^2 chyby modelových O-C diagramov sú okrem prípadu TX Her výrazne menšie pre parametre určené v tejto práci. Pri dvojhviezde TX Her je chyba χ^2 získaná v tejto práci mierne vyššia, čo môže byť spôsobené malým počtom generácií a populácií v GA a malým počtom krokov v MCMC.

Algoritmus fitovania O-C diagramov, ktorý je uvedený v tejto práci, je vhodný na analýzu O-C diagramov veľkého množstva zákrytových dvojhviezd, ktoré vykazujú vplyv LiTE efektu. Skúmaniu O-C diagramov pomocou uvedeného algoritmu sa preto budeme ďalej podrobne venovať.

Literatúra

Albayrak, B., Ak, T., Elmasli, A., 2003, AN, 324, 523

Djurašević, G. et al., 2004, A&A, 415, 283

Erdem, A. et al., 2011, NA, 16, 498

Gajdoš, P., Parimucha, Š., Kudak, V., 2016, in preparation

Hilditch, R. W. et al., 2003 MNRAS, 344, 644

Irwin, J. B., 1952, ApJ, 116, 211

Mikulášek, Z., Zejda, M., 2013, Úvod do studia proměnných hvězd, munipress

Razali, N. M., Geraghty, J., 2011, Lect. Notes in Eng. Comp. Sci., 2191, 1134

Samus, N. N., et al., 2009, VizieR Online Data Catalog, 1,

Van Hamme, W., Wilson, R. E., Guinan, E. F., 1995, AJ, 110, 1350

Weise, T., 2011. Global Optimization Algorithm - Theory and Application. 3rd Ed.,

Retrieved from: <http://www.it-weise.de/>

Wolf, M. et al., 2002, A&A, 383, 533

Yakut, K. et al., 2003, A&A, 401, 1095

Žukovič, M., 2015, Počítačová fyzika I, UPJŠ

Dodatok

Parameter	Albayrak et al. (2003)	Táto práca
T_0 [MHJD]	27887.7305 ± 0.0021	27887.7276 ± 0.0004
P [day]	4.1346657 ± 0.0000010	4.1346662^5
τ_3 [MHJD]	30792 ± 45	31624 ± 1081
P_3 [year]	23.68 ± 0.17	23.53 ± 0.28
e_3	0.20 ± 0.04	0.15 ± 0.09
ω_3 [deg]	32.0 ± 2.0	58.4 ± 45.8
$a_{12} \sin i_3$ [AU]	1.47 ± 0.04	1.66 ± 0.07
$f(M_3) [M_\odot]$	0.0057 ± 0.0004	0.0083 ± 0.0010
χ^2	253.7	188.6

Tabuľka 1: Parametre systému AR Aur.

Parameter	Erdem et al. (2011)	Táto práca
T_0 [MHJD]	40008.36875 ± 0.00036	40008.36981 ± 0.00056
P [day]	$2.059809743 \pm 0.00000005$	2.05980944^5
τ_3 [MHJD]	44752 ± 263	44777 ± 127
P_3 [year]	51.6 ± 0.7	53.9 ± 0.9
e_3	0.66 ± 0.04	0.76 ± 0.06
ω_3 [deg]	49.0 ± 3.0	39.5 ± 3.3
$a_{12} \sin i_3$ [AU]	2.36 ± 0.09	2.68 ± 0.27
$f(M_3) [M_\odot]$	0.0049 ± 0.0005	0.0065 ± 0.0019
χ^2	219.4	222.6

Tabuľka 2: Parametre systému TX Her.

⁵fixovaná hodnota z O-C brány

Parameter	Wolf et al. (2002)	Táto práca
T_0 [MHJD]	44416.38565 ± 0.00012	44416.38526 ± 0.00030
P [day]	$1.67734578 \pm 0.00000004$	1.67734617^6
τ_3 [MHJD]	50530 ± 50	52448 ± 150
P_3 [year]	37.60 ± 0.20	37.84 ± 0.24
e_3	0.185 ± 0.005	0.568 ± 0.053
ω_3 [deg]	152.3 ± 1.4	192.5 ± 4.7
$a_{12} \sin i_3$ [AU]	1.78^7	2.13 ± 0.12
$f(M_3) [M_\odot]$	0.0040^7	0.0068 ± 0.0011
χ^2	446.9	384.6

Tabuľka 3: Parametre systému U Oph.

Parameter	Yakut et al. (2003)	Táto práca
T_0 [MHJD]	45074.4649 ± 0.0002	45074.4781 ± 0.0002
P [day]	0.28410229 ± 0.0000001	0.28410290^6
Q [day]	$(1.04 \pm 0.01) \cdot 10^{-11}$	$(8.55 \pm 0.26) \cdot 10^{-12}$
τ_3 [MHJD]	49298 ± 25	49254 ± 69
P_3 [year]	19.59 ± 0.13	19.39 ± 0.04
e_3	0.12 ± 0.01	0.06 ± 0.02
ω_3 [deg]	356.0 ± 1.0	357.3 ± 3.5
$a_{12} \sin i_3$ [AU]	4.083 ± 0.005	4.163 ± 0.031
$f(M_3) [M_\odot]$	0.1770 ± 0.0020	0.1919 ± 0.0043
χ^2	692.0	408.6

Tabuľka 4: Parametre systému XY Leo.

⁶fixovaná hodnota z O-C brány

⁷chyba nebola v práci Wolf et al. (2002) uvedená