

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



**7. Česko-Slovenská studentská
vědecká konference ve fyzice**

**Vznik spekter v příčné hybnosti v
relativistických jaderných srážkách**

Radka Sochorová

Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Praha, 2016

Název práce:

Vznik spekter v příčné hybnosti v relativistických jaderných srážkách

Autor: Radka Sochorová

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Vědecká práce

Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Abstrakt:

Kvark-gluonové plazma (QGP) vznikající v rané fázi relativistické jaderné srážky je nedávno objevená forma husté a horké hmoty, ve které už běžné hadrony neexistují a ve které se kvarky a gluony stávají asymptoticky volnými.

Rozpínáním systému klesá jeho hustota energie, až se v určité chvíli plazma změní v hadronový plyn. Tento proces je známý jako hadronizace. Hadrony silně interagují a při dostatečně nízké hustotě energie mezi nimi nedochází k dalším rozptylům. Proces oddělení hadronů od fireballu se nazývá vymrznutí. Nejdříve při vyšší teplotě nastává chemické vymrznutí, při nižší teplotě pak nastane kinetické vymrznutí.

Je tedy důležité vytvářet teoretické modely, které by co nejpřesněji popsaly nadplochu vymrznutí a zahrnout do nich efekty, které mohou tvar nadplochy vymrznutí ovlivňovat jako je podélná a příčná expanze, viskozita nebo rozpady rezonancí. Tvar nadplochy vymrznutí je také ovlivněn různou parametrizací této nadplochy. Na této nadploše vymrznutí jsou tvořena spektra v příčné hybnosti. Spektra potom závisí na tvaru nadplochy a na jejím dynamickém stavu.

Cílem této práce je studium vlivu různých tvarů nadplochy vymrznutí na tvar spekter v příčné hybnosti. Dalším cílem je potom zkoumání vlivu viskozity a rozpadu rezonancí na tvar spektra v příčné hybnosti.

Klíčová slova: Kvark-gluonové plasma, podélné expanze, příčná expanze, nadplocha vymrznutí, viskozita, rezonance, DRAGON

Obsah

Úvod	7
1 Těžko-iontové jaderné srážky	8
1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky	8
1.2 Kvantová chromodynamika (QCD)	8
1.3 Kvark-gluonové plazma	10
1.4 Horká a hustá jaderná hmota	11
1.5 Malý třesk	11
1.6 Hydrodynamická expanze	12
2 Teplota fireballu a jeho expanze v podélném a příčném směru	14
2.1 Tok částic	14
2.1.1 Jednočásticová spektra	14
2.1.2 Statický fireball	17
2.1.3 Podélná expanze	19
2.1.4 Příčná expanze	22
2.2 Bjorkenův model	23
3 Různé tvary nadplochy vymrznutí a profily příčné rychlosti expanze	24
3.1 Vztah Coopera a Fryea	24
3.1.1 Emisní funkce	26
3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu	27
3.2.1 Odvození pro fermiony	29
3.2.2 Odvození pro bosony	34
4 Viskozita a její vliv na spektra v příčné hybnosti	37
4.1 Ideální a neideální hydrodynamika	37
4.2 Viskózní korekce pro Bjorkenovu expanzi	38
4.3 Viskózní tenzor a blast-wave model	39
4.4 Bjorkenova expanze	41

4.5	Odvození viskozity pro protony	42
4.6	Odvození viskozity pro piony a kaony	46
4.7	Odhad vlivu viskozity na tvar spektra	49
5	Vliv produkce hadronů z rozpadů rezonancí a vliv chemického složení rezonančního plynu	53
5.1	Termodynamický model	53
5.2	Rozpady rezonancí	54
5.3	DRAGON	55
	Závěr	62
A	Příloha: Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu	63
B	Příloha: Odvození korekce na viskozitu	65
	Příloha B: Odvození korekce na viskozitu pro Bjorkenovu expanzi	65
B.1	Odvození prostorových komponent viskózního tenzoru	65
B.2	Odvození spektra v příčné hmotnosti pro protony s korekcí na viskozitu	68

Seznam obrázků

1.1	Fázový diagram hmoty v rovině T a baryochemického potenciálu μ_B	9
1.2	První fázový diagram silně interagující hmoty	11
1.3	Malý třesk	12
1.4	Velký třesk	13
2.1	Schéma hadronové polévky	16
2.2	Časoprostorový vývoj systému	20
3.1	Graf závislosti podélného vlastního času $\tau_f(r)$ na r	28
3.2	Spektrum v příčné hmotnosti pro protony	33
3.3	Spektrum v příčné hmotnosti pro piony	35
3.4	Spektrum v příčné hmotnosti pro kaony	36

4.1	Spektrum v příčné hmotnosti pro protony se započítáním korekce na viskozitu	45
4.2	Spektrum v příčné hmotnosti pro kaony se započítáním korekce na viskozitu	47
4.3	Spektrum v příčné hmotnosti pro piony se započítáním korekce na viskozitu	48
4.4	Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro protony	50
4.5	Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro piony	51
4.6	Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro kaony	52
5.1	Histogram pro piony 0 - 5 %	56
5.2	Histogram pro piony 20 - 40 %	57
5.3	Histogram pro piony 60 - 80 %	57
5.4	Histogram pro kaony 0 - 5 %	58
5.5	Histogram pro kaony 20 - 40 %	58
5.6	Histogram pro kaony 60 - 80 %	59
5.7	Histogram pro protony 0 - 5 %	59
5.8	Histogram pro protony 20 - 40 %	60
5.9	Histogram pro protony 60 - 80 %	60

Úvod

Jednou z oblastí zájmu současné částicové fyziky je studium horké a husté hmoty nazývané kvark-gluonové plazma (QGP), ve které už běžné hadrony neexistují a ve které se kvarky a gluony stávají asymptoticky volnými. Toto médium vzniká v rané fázi relativistické jaderné srážky. Díky rozpínání systému dochází k poklesu hustoty energie a k přeměně plazmatu v hadronový plyn. Tento proces je známý jako hadronizace. Silně interagující hadrony se při nízké hustotě energie oddělí od fireballu. Toto se nazývá vymrznutí. Nejdříve při vyšší teplotě nastává chemické vymrznutí, poté při nižší teplotě nastane kinetické vymrznutí.

První kapitola je věnována těžko-iontovým srážkám. Stručně je zde popsána kvantová chromodynamika a historie kvark-gluonového plazmatu. Dále je v této kapitole zmíněn Malý třesk, tzn. analogie mezi fyzikou relativistických srážek a fyzikou raného vesmíru.

V druhé kapitole se věnujeme nejprve spektru v příčné hybnosti pocházejícího ze statického fireballu, poté je rozebírán vliv podélné a příčné expanze na tvar spektra.

V další kapitole je odvozen tvar nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu $\tau_f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2$.

Následně se zaměříme na viskozitu a její vliv na spektra v příčné hybnosti pionů, protonů a kaonů.

Poslední kapitola je věnována vlivu produkce hadronů z rozpadů rezonancí různých hmotností pro centrální srážky 0 - 5 % a pro necentrální srážky 20 - 40 % a 60 - 80 %. Simulace rozpadu rezonancí je prováděna pomocí Monte Carlo generátoru DRAGON [23].

1 Těžko-iontové jaderné srážky

1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky

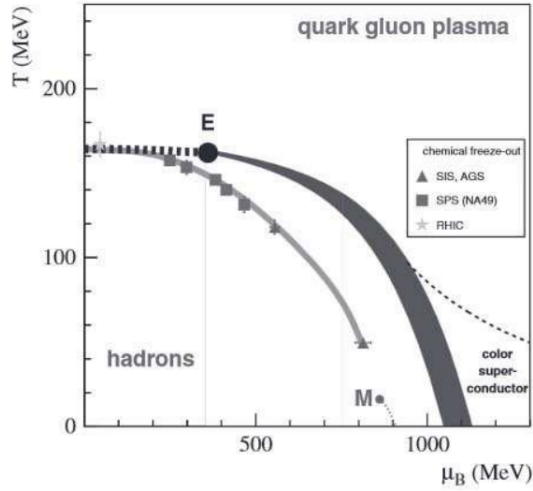
Fyzika relativistických těžko-iontových srážek spojuje fyziku vysoko-energetických elementárních částic s jadernou fyzikou. Výraz "těžké ionty" používáme pro těžká atomová jádra a termín relativistická energie označuje energetický stav, ve kterém kinetická složka výrazně převládá nad zbytkem energie. Jádra a interakce jsou popsány efektivními modely [1].

V oblasti relativistických srážek těžkých iontů zkoumáme vlastnosti horké a husté jaderné/hadronové hmoty z pohledu základních interakcí. Experimentální výzkum je důležitý pro teoretické předpovědi nové fáze hadronové hmoty, přechody mezi nimi a pro rekonstrukci fázového diagramu silně interagující hmoty z hlediska parametrů jako je teplota a baryochemický potenciál μ_B .

Ve vysoko-energetických jaderných srážkách se většina efektů odhaduje pomocí termodynamiky nebo statistické fyziky. Důležité je na tomto místě zmínit fakt, že hadronové systémy produkované ve srážkách nejsou statické. Dynamiku systému popisujeme pomocí relativistické hydrodynamiky. Časoprostorový vývoj probíhá daleko od rovnovážné polohy, protože hmota produkovaná ve srážce rychle expanduje a chladne.

1.2 Kvantová chromodynamika (QCD)

Při vysoce-energetických jaderných srážkách je produkován systém silně interagujících částic. Teorii zabývající se silnou interakcí kvarků, které jsou uvězněny v hadronech (baryonech), zprostředkovanou 8 nehmotnými gluony, nazýváme kvantová chromodynamika. Kvantová chromodynamika je teorie jejímž nábojem je tzv. barva. Důležitou vlastností kvantové chromodynamiky je barevné uvěznění, které je opakem asymptotické volnosti. Problém je, že barevně nabitě částice, kvarky a gluony, nemůžeme přímo pozorovat. To znamená, že kvarky a gluony se nemohou v konečném stavu jevit jako samostatné částice [2]. Kvantová chromodynamika předpovídá fázové přechody mezi dekonfinovanými kvarky a konfinovanými



Obrázek 1.1: Čára fázového přechodu mezi partony a hadrony končí kritickým bodem E (plná čára). Dále jsou vykresleny body hadrochemického vymrznutí z grand-kanonického statistického modelu (spodní čára). Cross-over přechod se vyskytuje při menších hodnotách μ_B . Převzato [3].

hadrony. V současné době máme v QCD přibližný fázový diagram hmoty a jejich stavů v rovině teploty T a baryochemického potenciálu μ_B . Fázový diagram je na Obr. 1.1. Vidíme, že dominantní je čára fázového přechodu mezi partony a hadrony, která plynule interpoluje mezi dvěma extrémy. První z nich nastává, pokud převažuje ohřívání hmoty (vysoká teplota T , nízká hodnota baryochemického potenciálu μ_B).

QCD předpokládá, že při takto nízké hodnotě baryochemického potenciálu μ_B kritická teplota přechodu mezi konfinovanou a dekonfinovanou fází hmoty přibližně $T_{crit} \approx 170$ MeV, což odpovídá hustotě energie přibližně $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. V současné době je snaha najít a přesně změřit tento přechod. Druhý extrém nastává, pokud převládá stlačování hmoty (teplota $T \rightarrow 0$ a baryochemický potenciál $\mu_B > 1 \text{ GeV}$). Předpokládá se, že dochází k fázovému přechodu 1. druhu, až do chvíle než je dosaženo kritického bodu E ($200 \leq \mu_B(E) \leq 500 \text{ MeV}$). V tomto bodě nastává fázový přechod 2. druhu. Dále od kritického bodu E , pro malou hodnotu μ_B , nastává fázový cross-over přechod neboli rychlý přechod. Na Obr. 1.1 vidíme, že tento přechod nastává přibližně pro hodnoty baryochemického potenciálu $\mu_B < 350 \text{ MeV}$ [3].

1.3 Kvark-gluonové plazma

Při studiu relativistických těžko-iontových srážek jsou zajímavé 2 fázové přechody, které jsou předpovídaný teorií kvantové chromodynamiky. Jedním z nich je osvobození kvarků a druhým je chirální fázový přechod. Pokud máme přirozené podmínky (nízké hustoty energie), pak jsou kvarky a gluony uvězněny v hadronech.

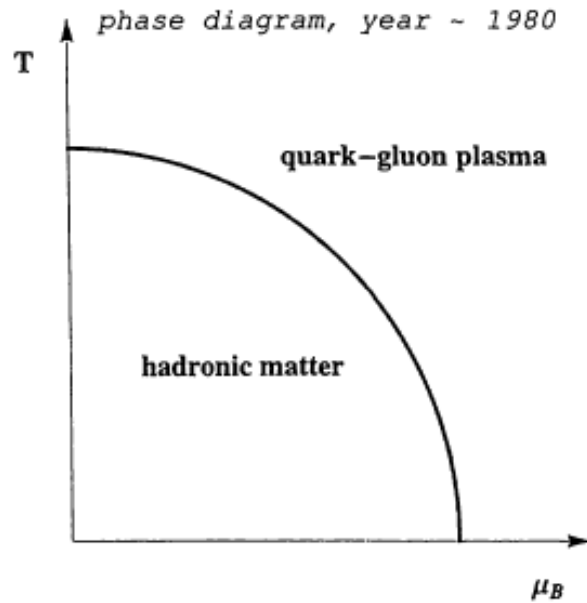
Při zvyšování teploty T (ohřívání) nebo při zvyšování baryonové hustoty (stlačování) může při fázovém přechodu nastat stav, ve kterém už běžné hadrony neexistují a ve kterém se kvarky a gluony stávají relevantními stupni volnosti.

V roce 1975, poté co došlo v teorii silné interakce k objevení asymptotické volnosti, vydali J. C. Collins a M. J. Perry článek o superhusté hmotě nacházející se uvnitř neutronových hvězd, při explozi černých děr nebo v rané fázi velkého třesku vesmíru. Collins a Perry tvrdili, že se superhustá hmota mnohem pravděpodobněji skládá z kvarků a gluonů než z hadronů [4].

Ve stejném roce N. Cabibbo a G. Parisi zjistili, že limitní Hagedornova teplota může být teplota fázového přechodu z hadronové do kvarkové hmoty [6]. Navrhli také první fázový diagram silně interagující hmoty, který je znázorněn na Obr. 1.2.

V roce 1978 zavedl E. V. Shuryak název kvark-gluonové plazma [7]. Společně s J. I. Kapustou [8] provedl výpočty fázových přechodů při konečné teplotě. V tomtéž roce S. A. Chin spočítal hustotu energie při fázovém přechodu mezi jadernou hmotou a kvarkovou hmotou jako funkci teploty. Výsledek jeho výpočtu naznačoval v těžko-jaderných srážkách při laboratorních kinetických energiích několika GeV na nukleon přechod do kvarkové hmoty [9].

V současné době víme, že v relativistických těžko-jaderných srážkách vzniká velmi hustý systém silně interagující hmoty kvarků a gluonů. Tento systém je vysoce termalizovaný a vykazuje silné kolektivní chování. Jestliže má systém navíc dostatečně vysokou teplotu, můžeme tvrdit, že produkovaná hmota je kvark-gluonové plazma. Problémem stále zůstává stanovení fyzikálních vlastností plazmatu. Jsou tedy zapotřebí další studie, abychom získali více informací o hustém mediu vytvořeném při relativistických těžko-iontových experimentech [1].



Obrázek 1.2: První fázový diagram silně interagující hmoty. Převzato z [1].

1.4 Horká a hustá jaderná hmota

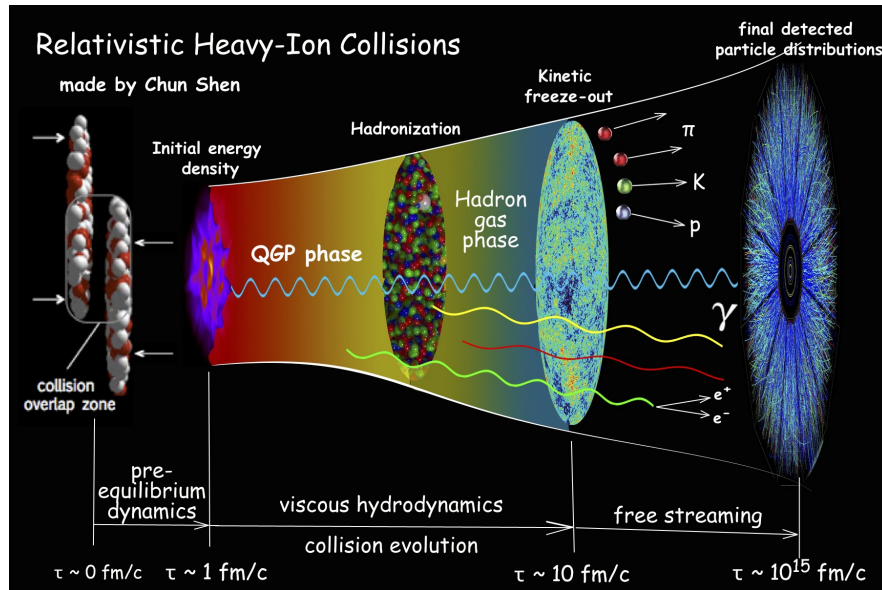
Důležité informace o vlastnostech horké a husté hadronové hmoty nám poskytuje studium vysoko-energetických jaderných srážek. Horkou a hustou hadronovou hmotou máme na mysli hmotu, která se vytváří v pozdních fázích srážek, kde už můžeme hadrony považovat za relevantní stupně volnosti. Tyto informace nám můžou také pomoci zrekonstruovat modely neutronových hvězd a explozí supernov.

1.5 Malý třesk

Mezi fyzikou relativistických srážek těžkých iontů a fyzikou raného vesmíru existuje několik analogií [1].

Pozorované mikrovlnné záření má Bose-Einsteinovo spektrum, jehož teplota je posunuta pomocí červeného posuvu z původní hodnoty 3000 K na hodnotu 2,7 K. V relativistických srážkách těžkých iontů jsou hadronová p_T spektra posunuta díky modrému posuvu kvůli

1.6 Hydrodynamická expanze



Obrázek 1.3: Malý třesk. Převzato z [5].

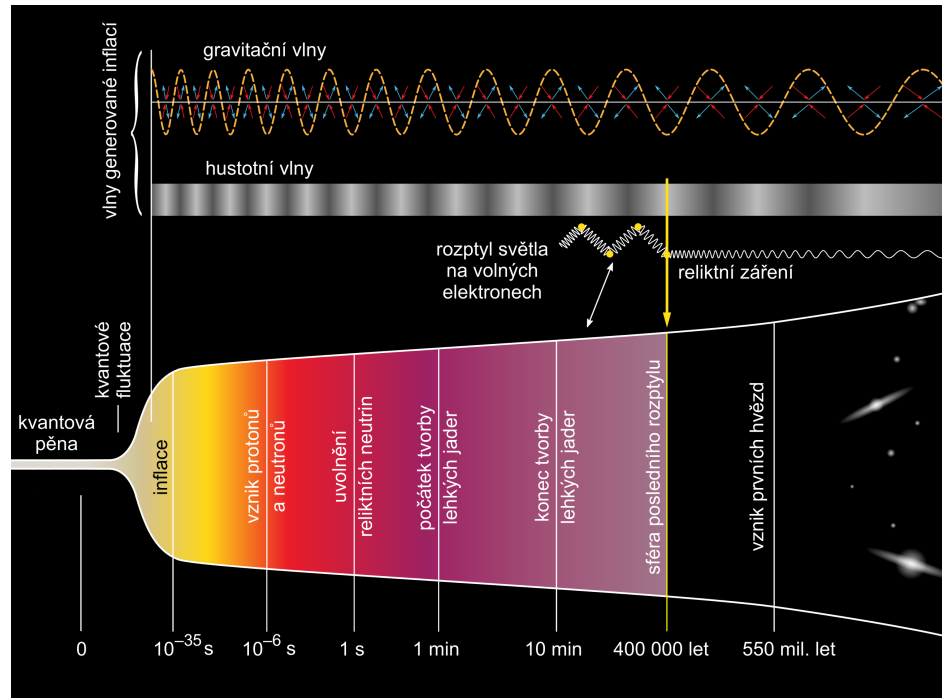
silnému příčnému toku. Vidíme tedy, že jak při Velkém třesku, tak v těžko-iontových srážkách, pozorovaná hybnostní spektra obsahují termální fyziku modifikovanou pomocí kolektivní dynamiky.

Reliktní záření se oddělilo dlouho poté, co nastala syntéza nukleonů. To se podobá situaci s dvěma vymrznutími - kinetické a chemické vymrznutí. Nejdůležitější analogií je, že u reliktního záření i u hadronů se studují anizotropie rozdělení, které nám něco říkají o struktuře zdroje- vesmíru nebo fireballu.

Kvůli těmto zmíněným vlastnostem bývají relativistické srážky těžkých iontů nazývány Malým třeskem. Je ale důležité si uvědomit, že Velký třesk a relativistické srážky mají i řadu odlišných vlastností. Jako příklad uvedu přitažlivou gravitační sílu. Malý třesk je na Obr. 1.3 a Velký třesk na Obr. 1.4.

1.6 Hydrodynamická expanze

Lokálně termalizované kvark-gluonové plazma vzniká v případě, že je systém dostatečně rychle ohřán. V takovém případě může být vývoj systému popsán pomocí relativistické hydro-



Obrázek 1.4: Velký třesk. Převzato z [11].

dynamiky skoro dokonalé kapaliny. Použití relativistické hydrodynamiky je pro nás užitečné, protože velmi zjednodušuje popis srážky. Hydrodynamické rovnice popisují lokální zákony zachování energie, hybnosti, baryonového čísla, podivnosti atd. a vyžadují znalost stavové rovnice hmoty [1]. V důsledku expanze se termodynamické vlastnosti hadronové hmoty rychle mění. Tento fakt je v souladu s tím, že je zde přítomný fázový přechod z kvark-gluonového plazmatu vysoké teploty ($T \gg T_c$) do hadronového plynu o nízké teplotě ($T \ll T_c \sim 170$ MeV).

2 Teplota fireballu a jeho expanze v podélném a příčném směru

2.1 Tok částic

Kolektivním efektem kvark-gluonového plazmatu je makroskopický tok této hmoty v určitém směru. Fireball ("Ohnivá koule") produkovaný v relativistických jaderných srážkách se může rozpínat v podélném směru (ve směru svazku) a také v příčném směru (ve směru kolmém na směr paprsku). Podélná expanze nastává ze dvou důvodů. Prvním z nich je skutečnost, že srážející se nukleony (partony) vysoce energetických jader nejsou srážkou úplně zastaveny a pokračují v pohybu ve směru svazku. Druhým důvodem je, že kvůli počátečním podmínkám bude fireball mnohem více sevřený v podélném směru. V tomto případě vznikají ve fireballu silné podélné gradienty tlaku, které nutí systém rozpínat se. Podélné rozpínání systému je tedy určeno především počátečními podmínkami srážky [12].

Rozpínání ve směru kolmém na směr paprsku je způsobeno interakcí mezi jednotlivými složkami hmoty. V případě, že se hmota chová extrémně hydrodynamicky, je příčná expanze systému způsobena vnitřním tlakem vysoce excitované hmoty. Zajímavý je fakt, že stavovou rovnici silně interagující hmoty můžeme studovat pomocí tohoto vnitřního tlaku, který je přes stavovou rovnici spojen s hustotou energie. Pokud se systém rozpíná, pak se mění jeho velikost, roste. Měření rychlosti příčné expanze je prováděno pomocí měření Dopplerova posuvu, který se projeví ve spektrech v příčné hybnosti.

2.1.1 Jednočásticová spektra

Kvark-gluonové plazma je vytvořeno v rané fázi relativistické jaderné srážky. Systém se rozpíná a tím klesá jeho hustota energie. Při určité hodnotě, která není dostatečná k udržení plazmy, se plazma mění v hadronový plyn. Tento proces se nazývá hadronizace. Protože hadrony silně interagují, nemůžou uniknout z fireballu. Při dostatečně nízké hustotě energie nedochází k dalším rozptylům mezi hadrony. Proces oddělení hadronů od fireballu se nazývá

2 TEPLOTA FIREBALLU A JEHO EXPANZE V PODÉLNÉM A PŘÍČNÉM SMĚRU

vymrznutí (freeze-out). Hadronová spektra se tvoří při tomto vymrznutí. Máme dva druhy vymrznutí: chemické a kinetické.

Kinetický neboli tepelný freeze-out nastává, když přestanou hadrony interagovat. Tepelné vymrznutí je přechod mezi silně vázaným systémem a volnými hadrony. Přechod je vyvolán rozpínáním hmoty, což způsobuje rychlý růst střední volné dráhy částic λ_{mfp} . Kinetický freeze-out tedy nastává, když je časová škála srážky $\tau_{kol} \sim \lambda_{mfp}$ větší než časová škála rozpínání systému τ_{exp} .

To znamená, že

$$\tau_{kol} \geq \tau_{exp}, \quad (2.1)$$

kde typický čas mezi srážkami τ_{kol} lze spočítat jako převrácenou hodnotu součinu hustoty částice a průměrného účinného průřezu

$$\tau_{kol} \sim \frac{1}{\sigma n}. \quad (2.2)$$

Doba rozpínání systému je charakterizována jako parciální derivace čtyřrychlosti u^μ , která popisuje hydrodynamický tok hmoty

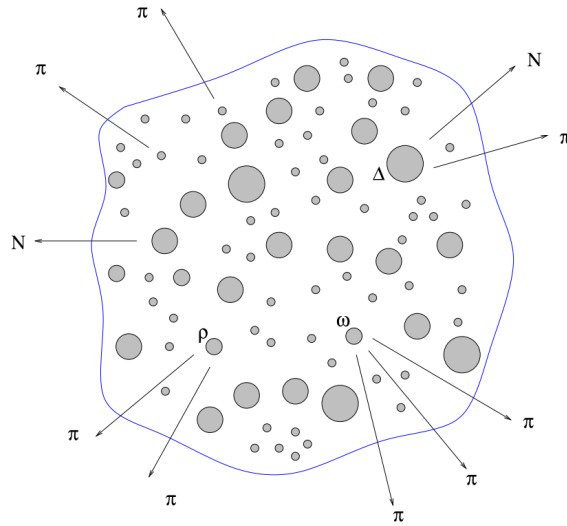
$$\tau_{exp} \sim \frac{1}{\partial_\mu u^\mu}. \quad (2.3)$$

Zjednodušeně se dá říci, že kinetický freeze-out nastává v okamžiku, kdy je střední volná dráha hadronů stejného řádu jako velikost systému. V případě rychlého rozpínání systému nastává tepelný freeze-out také rychle. Hybnostní rozdělení částic je zmrazeno a pro částice volně se pohybující k detektoru se nemění v čase.

Tepelné vymrznutí může nastat až po chemickém vymrznutí.

Při ochlazování hadronového systému je velice pravděpodobné, že neelastické srážky mezi složkami systému skončí dříve než elastické srážky. Ve chvíli, kdy dojde k ukončení neelastických srážek, říkáme, že nastal chemický freeze-out. Obecně platí, že teplota chemického vymrznutí T_{chem} je vyšší než teplota tepelného vymrznutí T_{tep}

2.1 Tok částic



Obrázek 2.1: Schematický obrázek hadronové polévky vytvořené v relativistické těžko-iontové srážce při vymrznutí. Rezonance se následně rozpadají na stabilní částice. Zahrnutí mnoha rezonancí je rozhodující pro spolehlivý popis produkce částic. Převzato z [15].

$$T_{chem} > T_{tep}. \quad (2.4)$$

Teplotu chemického vymrznutí lze odvodit z poměrů hadronových multiplicit. Při vývoji systému z chemického do tepelného vymrznutí hrají hlavní roli elastické srážky a rozpady těžších rezonancí, které navýší počet stabilních hadronů. Schéma rozpadu rezonancí je na Obr. 2.1.

Chemické vymrznutí je charakterizováno několika termodynamickými parametry. Jsou to teplota, chemický potenciál a fugacita.

Typická doba života fireballu je v řádech desítek fm/c, což je $\sim 10^{-22}$ s a typický rozměr je v řádu 10 fm. V porovnání s typickým měřítkem silného rozptylu, které je v řádu 1 fm, je fireball větší a žije déle. Rozdělení částic je charakterizováno pomocí Bose-Einsteinovy nebo Fermi-Diracovy statistiky [12].

2.1.2 Statický fireball

Nejprve se podíváme na příčné hmotnostní spektrum některých druhů hadronů ze stálého tepelného zdroje.

Lorentzovsky invariantní spektrum hybnosti částic vyzářených tepelným zdrojem o teplotě T je dáno vztahem

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^3 N}{m_T dm_T d\phi dy} = \frac{gV}{(2\pi)^3} E \exp\left(\frac{-(E - \mu)}{T}\right), \quad (2.5)$$

kde m_T je příčná hmotnost částice, y je rapidita, ϕ je azimutální úhel v rovině y - x , g je spin-isospinový degenerační faktor, μ je grandkanonický potenciál a V je objem zdroje.

Příčnou hmotnost částice definujeme vztahem

$$m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}, \quad (2.6)$$

kde m je hmotnost částice a p_T je příčná hybnost částice, která je definovaná jako

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \quad (2.7)$$

Příčná hmotnost je Lorentzovsky boost-invariantní podél osy svazku.

Ve všech dalších vztazích budu pokládat $\hbar^1 = c = k_B^2 = 1$.

Při relativistických energiích je užitečné místo rychlosti zavést veličinu nazývanou rapidita. Definujeme ji jako

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{p_z}{E}\right) = \operatorname{arctanh}(v_z). \quad (2.8)$$

Energie je dána vztahem

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (2.9)$$

a z -ová komponenta rychlosti

¹redukovaná Planckova konstanta $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,58 \cdot 10^{-22}$ MeV [1]

²Boltzmannova konstanta $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/K (1 eV = $1,6 \cdot 10^{-12}$ erg) [1]

2.1 Tok částic

$$v_z = \frac{p_z}{E}. \quad (2.10)$$

Čtyřhybnost částice může být napsána jako

$$p^\mu = (E, \vec{p}) = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi', p_T \sin \phi', m_T \sinh y). \quad (2.11)$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro rozdělení částic lze použít Boltzmannovu statistiku místo Bose-Einsteinovy nebo Fermi-Diracovy statistiky.

Hybnostní spektrum je v tomto případě tedy úměrné

$$\frac{d^3 N}{dp^3} \propto \exp\left(-\frac{E}{T}\right) = \exp\left(-\frac{m_T \cosh y}{T}\right). \quad (2.12)$$

Abychom dostali hledané spektrum v oblasti rapidity $y = 0$ ($\cosh y = 1$), musíme integrovat přes celý objem zdroje

$$\frac{d^3 N}{dp^3} = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} G(\vec{x}) \exp\left(-\frac{m_T \cosh y}{T}\right), \quad (2.13)$$

kde $G(\vec{x})$ je hustota rozdělení zdroje a faktor $\frac{1}{(2\pi)^3}$ je elementární buňka fázového prostoru.

Abychom získali Lorentzovsky inavriantní spektrum, musíme rovnici (2.13) vynásobit energií E ,

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} \Big|_{y=0} = \frac{d^2 N}{m_T dm_T d\phi dy} \Big|_{y=0} = \frac{V}{(2\pi)^3} m_T \exp\left(-\frac{m_T}{T}\right), \quad (2.14)$$

kde $V = \int d^3 x G(\vec{x})$.

Vyintegrováním přes rapiditu a zavedením modifikované Besselovy funkce K_1 získáme příčné hmotnostní spektrum

$$\frac{N}{m_T dm_T} = \frac{V}{2\pi^2} m_T K_1\left(\frac{m_T}{T}\right). \quad (2.15)$$

Vidíme, že spektrum ze statického tepelného zdroje závisí pouze na příčné hmotnosti.

Sklon spektra v semilogaritmickém měřítku je daný teplotou T .

2.1.3 Podélná expanze

Žádný reálný fireball není statický. Ve skutečnosti dochází k silnému podélnému rozpínání. Nejvíce používaný popis zahrnující podélné rozpínání systému je Bjorkenův boost-invariantní model.

Podélná boost-invariantní expanze vypadá stejně ve všech vztažných soustavách s jakoukoli podélnou rychlostí. Toto chování je podobné jako chování vesmíru. Představme si, že sedíme na jakémkoli místě ve vesmíru a koukáme se kolem sebe. Vždy budeme vidět úplně stejnou expanzi. Pokud bychom si teď sedli na jakékoli místo v rozpínajícím se podélně boost-invariantním fireballu a pozorovali bychom vše okolo nás, nebyli bychom schopni určit rychlost, jakou se pohybujeme. To znamená, že fireball musí být nekonečný v podélném směru. V opačném případě bychom rozpoznali rozdíl v rychlosti uprostřed a na okraji. V praxi je toto nemožné, ale v reakcích s vysokou energií vypadá fireball boost-invariantní v centrální oblasti. Okraje se od sebe oddalují [12].

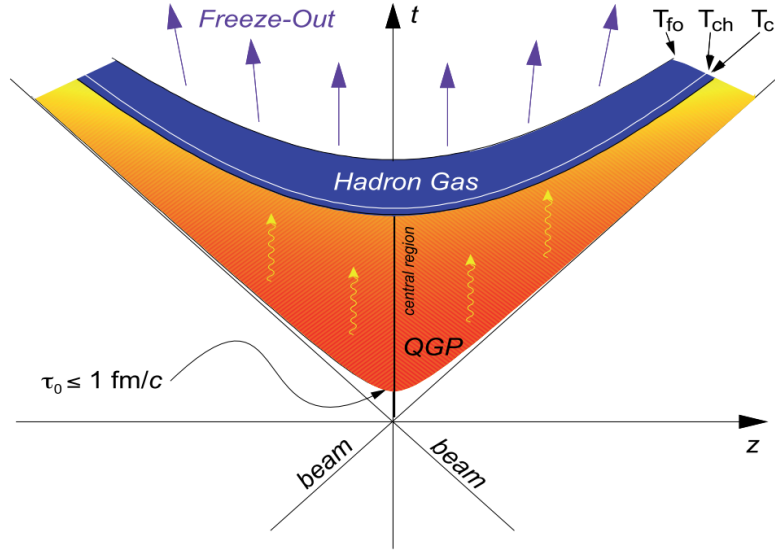
Podélná expanze v případě boost-invariantní expanze je dána vztahem

$$v_z = \frac{z}{t}. \quad (2.16)$$

Vzhledem k tomu, že v pohybujících se oblastech dochází k diletaci času, jak je vidět z Obr. 2.2, je pro další výpočty vhodnější zavést podélný vlastní čas

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}. \quad (2.17)$$

2.1 Tok částic



Obrázek 2.2: Časoprostorový vývoj podélné boost-invariantní expanze fireballu. Převzato z [14].

Dále je nutné si zavést časoprostorovou rapiditu η_s

$$\eta_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v_z}{1-v_z} \right), \quad (2.18)$$

kde v_z je dána rovnicí (2.16).

Jelikož máme podélnou boost-invariantní expanzi, všechny části fireballu se vyvíjí ve svém vlastním podélném čase τ . K parametrizaci nadplochy vymrznutí se používají příčné polární souřadnice r, Θ a časoprostorová rapidita η_s .

Kartézské souřadnice mají potom tvar

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta_s, r \cos \phi, r \sin \phi, \tau \sinh \eta_s). \quad (2.19)$$

V každé části fireballu bude rozložení hybnosti Boltzmannovské a bude úměrné

$$\propto \exp \left(-\frac{E^*}{T} \right), \quad (2.20)$$

2 TEPLOTA FIREBALLU A JEHO EXPANZE V PODÉLNÉM A PŘÍČNÉM SMĚRU

kde E^* je energie částice v lokální klidové soustavě. Vztah (2.20) platí za předpokladu, že máme lokální tepelné rozložení hybnosti částic ve fireballu.

Energii E^* určíme ze vztahu

$$E^* = p_\mu u^\mu, \quad (2.21)$$

kde u^μ je čtyřrychlost dané části fireballu. Pro podélnou boost-invariantní expanzi je definována jako

$$u^\mu = (\cosh \eta_s, 0, 0, \sinh \eta_s). \quad (2.22)$$

Z rovnic (2.11) a (2.22) dostaneme

$$E^* = m_T \cosh(y - \eta_s). \quad (2.23)$$

Vztah pro Lorentzovsky invariantní spektrum, které zahrnuje podélnou boost-invariantní expanzi je dán rovnicí

$$\frac{d^2 N}{m_T dm_T d\phi dy} = \int_V \tau_{f_0} \frac{r dr d\phi d\eta_s}{(2\pi)^3} m_T \cosh(\eta_s - y) G(r) \exp\left(-\frac{m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (2.24)$$

kde $\tau_{f_0} r dr d\phi d\eta$ představuje element objemu d^3x , funkce $G(r)$ je rozložení fireballu v příčné souřadnici a V je objem podél nadplochy. Zdroj se nachází v oblasti prostoročasové rapidity $(-\infty, \infty)$.

Pokud se omezíme na oblast částic se střední rapiditou $y = 0$ a zavedeme modifikovanou Besselovu funkci K_1 , vztah (2.24) přejde na tvar

$$\left. \frac{d^2 N}{m_T dm_T d\phi dy} \right|_{y=0} = \frac{2\pi\tau_{f_0}}{(2\pi)^3} \int r dr G(r) m_T K_1\left(\frac{m_T}{T}\right), \quad (2.25)$$

faktor $2\pi\tau_{f_0} \int r dr G(r)$ je spojený s objemem, ze kterého částice pocházejí.

2.1 Tok částic

2.1.4 Příčná expanze

Reálný fireball se rozpíná také ve směru kolmém ke směru svazku. Budeme uvažovat azimutálně symetrický fireball, který je produkován v centrální srážce. Musíme zahrnout příčnou rychlost, která má dvě složky

$$v_x = v_t(r) \cos \phi, \quad (2.26)$$

$$v_y = v_t(r) \sin \phi. \quad (2.27)$$

Příčná rychlost je závislá na vzdálenosti od podélné osy fireballu r . Fireball parametrizujeme pomocí příčné rapidity $\eta_t(r)$, která musí vymizet pro $r = 0$, jelikož uprostřed není žádný příčný pohyb.

Čtyřrychlost popisující rozpínání systému je v tomto případě dána vztahem

$$u^\mu = (\cosh \eta_s \cosh \eta_t, \sinh \eta_t \cos \phi, \sinh \eta_t \sin \phi, \cosh \eta_t \sinh \eta_s). \quad (2.28)$$

Pro příčnou rychlost expanze pak platí

$$v_t = \frac{\tanh \eta_t(r)}{\cosh \eta_s}. \quad (2.29)$$

Energie částice v klidové soustavě systému je dána vztahem

$$E^* = p_\mu u^\mu = m_T \cosh(\eta_s - y) \cosh \eta_t - p_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi'). \quad (2.30)$$

Příčné hmotností spektrum má pak podle kroků v kapitole 2.1.3 tvar

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{m_T dm_T d\phi dy} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \tau_{f_0} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty d\eta_s m_T \cosh(\eta_s - y) G(r) \\ &\times \exp\left(-\frac{m_T \cosh(\eta_s - y) \cosh \eta_t(r) - p_T \sinh \eta_t(r) \cos(\phi - \phi')}{T}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

2 TEPLOTA FIREBALLU A JEHO EXPANZE V PODÉLNÉM A PŘÍČNÉM SMĚRU

Zavedeme modifikované Besselovy funkce I_0 a K_1 . Pro $\tau = konst$ vyintegrujeme přes η_s a ϕ a dostaneme hledané spektrum

$$\left. \frac{d^2 N}{m_T dm_T d\phi dy} \right|_{y=0} = \frac{\tau m_T}{(2\pi)^2} \int r dr G(r) I_0 \left(\frac{p_T \sinh \eta_t(r)}{T} \right) \cdot K_1 \left(\frac{m_T \cosh \eta_t(r)}{T} \right). \quad (2.32)$$

Výpočtu tvaru nadplochy pro specifickou volbu souřadnic a parametrů je věnována kapitola 3.

Vztahy z kapitol 2.1.2, 2.1.3 a 2.1.4 byly převzaty z [12].

2.2 Bjorkenův model

Bjorkenův model je založen na předpokladu, že rozdělení rapidity nabitých částic, $\frac{dN_{ch}}{dy}$, je konstantní v oblasti střední rapidity. To znamená, že centrální oblast fireballu je Lorentzovsky boost-invariantní podél osy svazku.

V tomto modelu nezávisí vývoj systému na časoprostorové rapiditě η_s , závisí pouze na podélném vlastním čase τ a na příčných souřadnicích x a y . Všechny části fireballu se vyvíjí ve svém vlastním podélném čase a měly by se oddělit ve stejném čase τ_f .

Nadplocha vymrznutí je pak dána požadavkem

$$\tau = \tau_f = konst. \quad (2.33)$$

Nadplochu vymrznutí pak parametrizujeme pomocí příčných polárních souřadnic r, ϕ a časoprostorové rapidity η_s , [12] a [1].

3 Různé tvary nadplochy vymrznutí a profily příčné rychlosti expanze

3.1 Vztah Coopera a Fryea

Cílem této kapitoly je spočítat rozdělení částic emitovaných při tepelném vymrznutí.

Počet částic oddělených z malého objemu dV , které mají při vymrznutí rovnovážné rozdělení $f_{eq}(E_p)$, je dán výrazem

$$dN = dV \int d^3p f_{eq}(E_p). \quad (3.1)$$

Tato rovnice je však platná jen v klidové soustavě elementu tekutiny. Rovnici zobecníme tak, že přidáme rozdělení z různých elementů tekutiny, které se pohybují nezávisle na sobě.

Předešlý vztah přepíšeme do kovariantního tvaru

$$dN = dV_\mu \int p^\mu \frac{d^3p}{E_p} f_{eq}(p \cdot u), \quad (3.2)$$

kde u^μ je čtyřrychlost elementu tekutiny a $dV^\mu = dV u^\mu$. V klidové soustavě, kde je čtyřrychlost elementu tekutiny $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, přejde rovnice (3.2) v rovnici (3.1). Protože dV^μ a u^μ závisí na časoprostorové pozici x , pro počet částic získáme

$$N = \int dV_\mu(x) \int p^\mu \frac{d^3p}{E_p} f_{eq}(p \cdot u(x)). \quad (3.3)$$

Obecně nelze pro elementy objemu psát $dV^\mu = dV u^\mu$, protože v rané fázi srážky je mnoho částic emitovaných z kraje systému. Tekutý element pak získáme vynásobením emisních oblastí časem, po který se umise uskutečňovala. Potom říkáme, že dV^μ má prostoru-podobný charakter. Výraz pro počet částic N má potom stejný tvar jako rovnice (3.3), ale element objemu $dV^\mu(x)$ není závislý na čtyřrychlosti $u^\mu(x)$. Výraz pro $dV^\mu(x)$ získáme z teorie, která se používá pro časoprostorový vývoj hmoty [1].

Pokud zahrneme do výpočtu všechny tyto předchozí výrazy, lze počet částic N , které se

3 RŮZNÉ TVARY NADPLOCHY VYMRZnutí A PROFILY PŘÍČNÉ RYCHLOSTI EXPANZE

oddělí z nadplochy vymrznutí Σ , psát ve tvaru

$$N = \int \frac{d^3p}{E_p} \int d\Sigma_\mu(x) p^\mu f(x, p). \quad (3.4)$$

Tento vztah se nazývá Cooper-Fryea.

Element tekutiny dV , který se pohybuje čtyřrychlostí u^μ , nahradíme tří-dimenzionálním elementem nadplochy vymrznutí $d\Sigma^\mu$, který je dán vztahem

$$d\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \frac{dx^\beta}{d\beta} \frac{dx^\gamma}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3.5)$$

kde $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ je Levi-Civitův tensor, parametry α, β, γ parametrizují tří-dimenzionální nadplochu vymrznutí v čtyř-dimenzionálním Minkowského prostoru. $d\Sigma^\mu$ můžeme považovat za čtyřvektor kolmý k nadploše s normou rovnou elementu objemu nadplochy. Komponenty čtyřvektoru $d\Sigma^\mu$ jsou za předpokladu $\varepsilon_{0123} = +1$ definovány vztahy

$$d\Sigma^0 = d\Sigma_0 = \varepsilon_{0ijk} \frac{dx^i}{d\alpha} \frac{dx^j}{d\beta} \frac{dx^k}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3.6)$$

$$d\Sigma^1 = -d\Sigma_1 = -\varepsilon_{1\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \frac{dx^\beta}{d\beta} \frac{dx^\gamma}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\partial(x^2, x^3, x^0)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3.7)$$

$$d\Sigma^2 = -d\Sigma_2 = -\varepsilon_{2\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \frac{dx^\beta}{d\beta} \frac{dx^\gamma}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma = -\frac{\partial(x^3, x^0, x^1)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3.8)$$

$$d\Sigma^3 = -d\Sigma_3 = -\varepsilon_{3\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\alpha} \frac{dx^\beta}{d\beta} \frac{dx^\gamma}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (3.9)$$

Platí

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^1}{\partial \beta} & \frac{\partial x^1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^2}{\partial \beta} & \frac{\partial x^2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \alpha} & \frac{\partial x^3}{\partial \beta} & \frac{\partial x^3}{\partial \gamma} \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

3.1 Vztah Coopera a Fryea

Rozdělení hybnosti vycházející z rovnice (3.4) má tedy tvar

$$E_p \frac{dN}{d^3p} = \frac{dN}{dyd^2p_T} = \int d\Sigma_\mu(x) p^\mu f(x, p). \quad (3.11)$$

Pokud máme systém částic, které jsou v lokální termodynamické rovnováze, dostaneme vztah

$$E_p \frac{dN}{d^3p} = \frac{dN}{dyd^2p_T} = \int d\Sigma_\mu(x) p^\mu f_{eq}(p^\alpha \cdot u_\alpha(x)), \quad (3.12)$$

kde funkce f_{eq} je rovnovážná rozdělovací funkce

$$f_{eq}(p^\alpha \cdot u_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\exp\left(\frac{p^\alpha u_\alpha - \mu}{T}\right) - \varepsilon \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

Pro Fermi-Diracovo rozdělení platí $\varepsilon = -1$ a pro Bose-Einsteinovo rozdělení je $\varepsilon = +1$.

Vztahy v kapitole 3.1 byly převzaty z [1].

3.1.1 Emisní funkce

Časoprostorové rozdělení poloh a hybností emitovaných částic udává emisní funkce, kterou zavádíme ve tvaru

$$S(x, p) = \int d\Sigma_\mu(x') p^\mu \delta^{(4)}(x' - x) f(x', p). \quad (3.14)$$

Vyintegrováním emisní funkce přes čas a prostor získáme invariantní rozdělení hybností

$$\frac{dN}{dyd^2p_T} = \int d^4x S(x, p) = \int d\Sigma_\mu(x) p^\mu f(x, p). \quad (3.15)$$

Emisní funkce je velice užitečná při určování fyzikálních podmínek vymrznutí.

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu

Pro odvození nadplochy vymrznutí parametrizovanou parabolou si zavedeme souřadnice

$$x^0 = t = \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel}, \quad (3.16)$$

$$x^1 = r \cos \phi, \quad (3.17)$$

$$x^2 = r \sin \phi, \quad (3.18)$$

$$x^3 = \tau_f(r) \sinh \eta_{\parallel}. \quad (3.19)$$

Podélný vlastní čas je dán parabolickou závislostí

$$\tau_f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \quad (3.20)$$

znázorněnou na Obr.3.1.

Proměnné popisující systém jsou tedy $\eta_{\parallel}, \phi, r$.

Čtyřvektor $d\Sigma^\mu$ má podle vztahů (3.6),(3.7),(3.8),(3.9) tvar

$$d\Sigma^\mu = (\cosh \eta_{\parallel}, \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cos \phi, \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sin \phi, \sinh \eta_{\parallel}) r \tau_f(r) d\eta_{\parallel} dr d\phi. \quad (3.21)$$

Podrobné odvození výrazu (3.21) je provedeno v Příloze A.

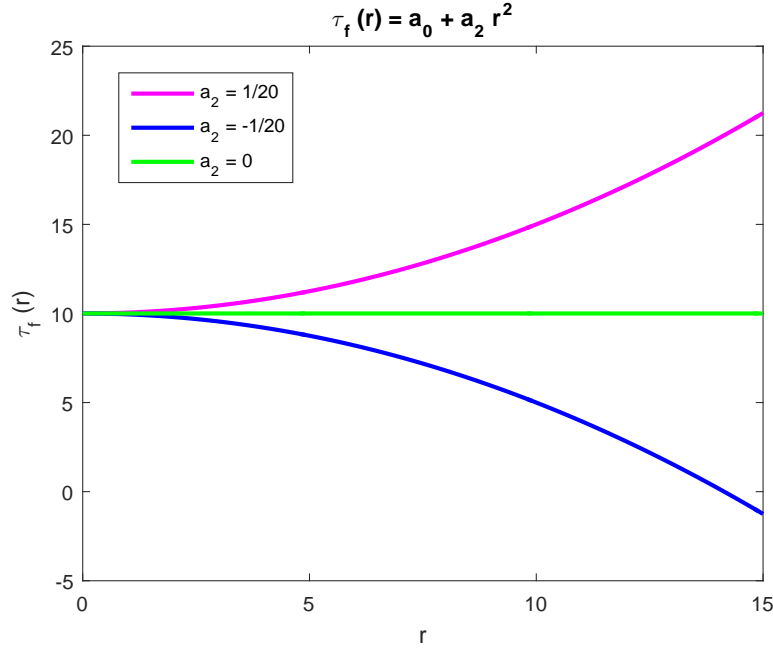
Čtyřhybnost je pro příčnou expanzi fireballu definovaná jako

$$p^\mu = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi', p_T \sin \phi', m_T \sinh y), \quad (3.22)$$

kde y je rapidita, m_T příčná hmotnost částice, resp. p_T příčná hybnost částice a ϕ' je úhel, pod kterým vylétává částice z fireballu vzhledem k ose rovnoběžné s podélnou osou fireballu.

Vynásobením čtyřhybnosti a čtyřvektoru $d\Sigma_\mu$ získáme

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu



Obrázek 3.1: Graf závislosti podélného vlastního času $\tau_f(r)$ na r .

$$\begin{aligned}
 d\Sigma_\mu p^\mu &= \left(m_T \cosh y \cosh \eta_{\parallel} - \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} p_T \cos \phi \cos \phi' - \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} p_T \sin \phi \sin \phi' - m_T \sinh y \sinh \eta_{\parallel} \right) \cdot \\
 &\cdot r \tau_f(r) d\eta_{\parallel} d\phi dr = \left(-\frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} p_T \cos(\phi - \phi') + m_T \cosh(y - \eta_{\parallel}) \right) \tau_f(r) r d\eta_{\parallel} d\phi dr.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dále je nutné si spočítat rovnovážnou rozdělovací funkci (rovnice 3.13). V dalších výpočtech budeme pokládat chemický potenciál $\mu = 0$.

Čtyřrychlost příčné expanze je definována rovnicí

$$u^\mu = (\cosh \eta_t \cosh \eta_{\parallel}, \sinh \eta_t \cos \phi, \sinh \eta_t \sin \phi, \cosh \eta_t \sinh \eta_{\parallel}), \tag{3.24}$$

kde

$$\sinh \eta_t = \eta_f \left(\frac{r}{R} \right), \tag{3.25}$$

R je poloměr fireballu.

3 RŮZNÉ TVARY NADPLOCHY VYMRZnutí A PROFILY PŘÍČNÉ RYCHLOSTI EXPANZE

Po vynásobení p^μ a u_μ dostaneme

$$p^\mu u_\mu = (m_T \cosh y \cosh \eta_\parallel \cosh \eta_t - p_T \sinh \eta_t \cos \phi \cos \phi' - p_T \sinh \eta_t \sin \phi \sin \phi' - m_T \cosh \eta_t \sinh y \sinh \eta_\parallel) = m_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_\parallel) - p_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi') \quad (3.26)$$

Spektrum, které získáme dosazením vztahů (3.23) a (3.26) do rovnice (3.13), má tvar

$$E \frac{dN}{d^3p} = \int \left(-\frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} p_T \cos(\phi - \phi') + m_T \cosh(y - \eta_\parallel) \right) \tau_f r d\eta_\parallel dr d\phi \times \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \exp \left[\frac{1}{T} (-p_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi') + m_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_\parallel)) - \varepsilon \right]^{-1}. \quad (3.27)$$

Meze integrálu zvolíme jako $r \in (0, R)$, $\eta_\parallel \in (-\infty, +\infty)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, kde R je poloměr fireballu.

3.2.1 Odvození pro fermiony

Začneme s odvozením spektra pro fermiony (protony), které mají Fermi-Diracovo rozdělení a tudíž $\varepsilon = -1$.

Nejdříve spočítáme první část integrálu

$$E \frac{dN}{d^3p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int m_T \cosh(y - \eta_\parallel) \tau_f(r) r \times \frac{d\eta_\parallel dr d\phi}{\exp \left[\frac{-p_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi') + m_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_\parallel)}{T} \right] + 1}. \quad (3.28)$$

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu

Pro výpočet integrálu použijeme vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x + 1} &= e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-x})^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-e^{-nx}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Po použití vztahu (3.29) přejde integrál (3.28) do tvaru

$$E \frac{dN}{d^3p} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{m_T}{(2\pi^2)} \int_0^R r \tau_f dr I_0 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_1 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right), \quad (3.30)$$

kde I_0 a K_1 jsou modifikované Besselovy funkce, které jsou odvozeny ze vztahů

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt, \quad (3.31)$$

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-z \cos \phi} d\phi. \quad (3.32)$$

Vztahy (3.31) a (3.32) byly převzaty z [17].

Podrobnější odvození integrálu (3.29) je provedeno v Příloze A.

Druhá část integrálu (3.27)

$$\begin{aligned} E \frac{dN}{d^3p} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} p_T \tau_f r \cos(\phi - \phi') \\ &\times \frac{d\eta_\parallel dr d\phi}{\exp \left[\frac{-p_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi') + m_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_\parallel)}{T} \right] + 1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

se počítá obdobně.

Po použití vztahu (3.29) získáme

3 RŮZNÉ TVARY NADPLOCHY VYMRZnutí A PROFILY PŘÍČNÉ RYCHLOSTI EXPANZE

$$E \frac{dN}{d^3p} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{p_T}{(2\pi^2)} \int_0^R \left(-\frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \tau_f(r) r \right) dr I_1 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_0 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right), \quad (3.34)$$

kde I_1, K_0 jsou modifikované Besselovy funkce. K_0 je definovaná vztahem (3.31) a I_1 je daná vztahem

$$I_1(z) = I_0'(z). \quad (3.35)$$

Vztah (3.35) byl převzat z [17].

Podrobnější odvození integrálu (3.34) je v Příloze A.

Dohromady tedy máme

$$\begin{aligned} E \frac{dN}{d^3p} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{m_T}{(2\pi^2)} \int_0^R r \tau_f dr I_0 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_1 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{p_T}{(2\pi^2)} \int_0^R \left(-\frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \tau_f(r) r \right) dr I_1 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_0 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

kde

$$\sinh \eta_t = \eta_f \frac{r}{R}, \quad (3.37)$$

$$\cosh \eta_{\parallel} = \sqrt{1 + \eta_f^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2}, \quad (3.38)$$

$$p_T = \sqrt{m_T^2 - m^2}. \quad (3.39)$$

Po dosazení

$$\tau_f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2, \quad (3.40)$$

$$a_1 = 0, \quad (3.41)$$

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu

do rovnice (3.36) získáme výsledné spektrum nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci ve tvaru

$$\begin{aligned}
 E \frac{dN}{d^3p} &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T}{(2\pi^2)} \int_0^R (a_0 r + a_2 r^3) dr I_0 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_1 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{p_T}{(2\pi^2)} \int_0^R (-2a_2 a_0 r^2 - 2a_2^2 r^4) dr I_1 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_0 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Spektrum v příčné hmotnosti pro protony je pro hodnoty parametrů

$$T = 120 \text{ MeV}, \tag{3.43}$$

$$a_0 = 10, \tag{3.44}$$

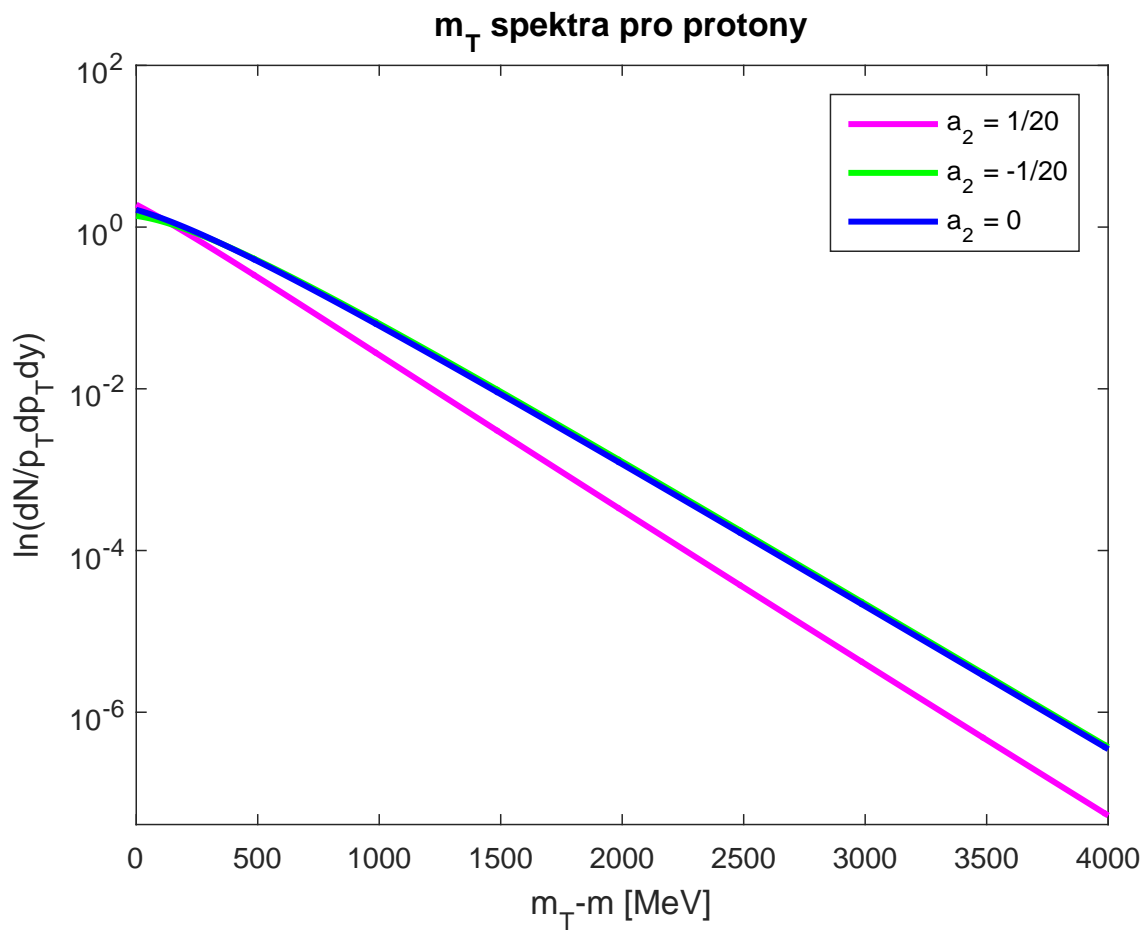
$$a_2 = \pm \frac{1}{20}, 0, \tag{3.45}$$

$$\eta_f = 0, 8 \tag{3.46}$$

$$R = 10 \tag{3.47}$$

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2 \tag{3.48}$$

vykresleno na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Spektrum v příčné hmotnosti pro protony se zahrnutím příčné expanze při teplotě $T = 120$ MeV. Nadplocha vymrznutí je parametrizována parabolickou funkcí.

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu

3.2.2 Odvození pro bosony

Odvození rozdělení částic pro bosony (piony a kaony) je obdobné. Bosony mají Bose-Einsteinovo rozdělení, pro které je $\varepsilon = +1$.

Pro výpočet integrálu použijeme vztah

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}. \quad (3.49)$$

Za hmotnost dosadíme pro piony hodnotu

$$m_{\pi^\pm} = 140 \text{MeV}/c^2 \quad (3.50)$$

a pro kaony hodnotu

$$m_{K^\pm} = 494 \text{MeV}/c^2. \quad (3.51)$$

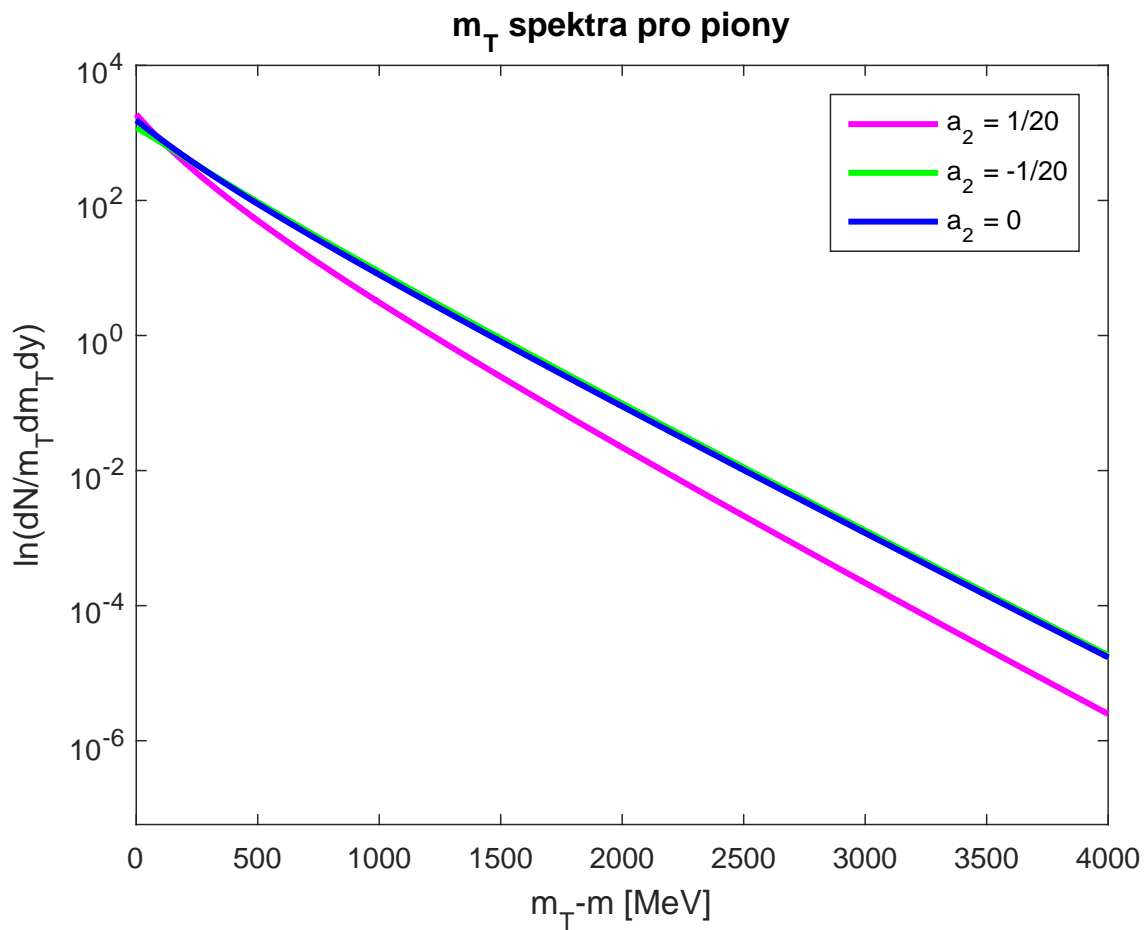
Při použití stejných vztahů jako pro protony bude mít výsledné spektrum nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci pro kaony a piony tvar

$$\begin{aligned} E \frac{dN}{d^3p} &= \frac{m_T}{(2\pi^2)} \int_0^R (a_0 r + a_2 r^3) dr I_0 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_1 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right) \\ &- \frac{p_T}{(2\pi^2)} \int_0^R (2a_2 a_0 r^2 + 2a_2^2 r^4) dr I_1 \left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T} \right) K_0 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Spektrum v příčné hmotnosti pro piony je vyobrazeno na Obr. 3.3 a pro kaony na Obr.

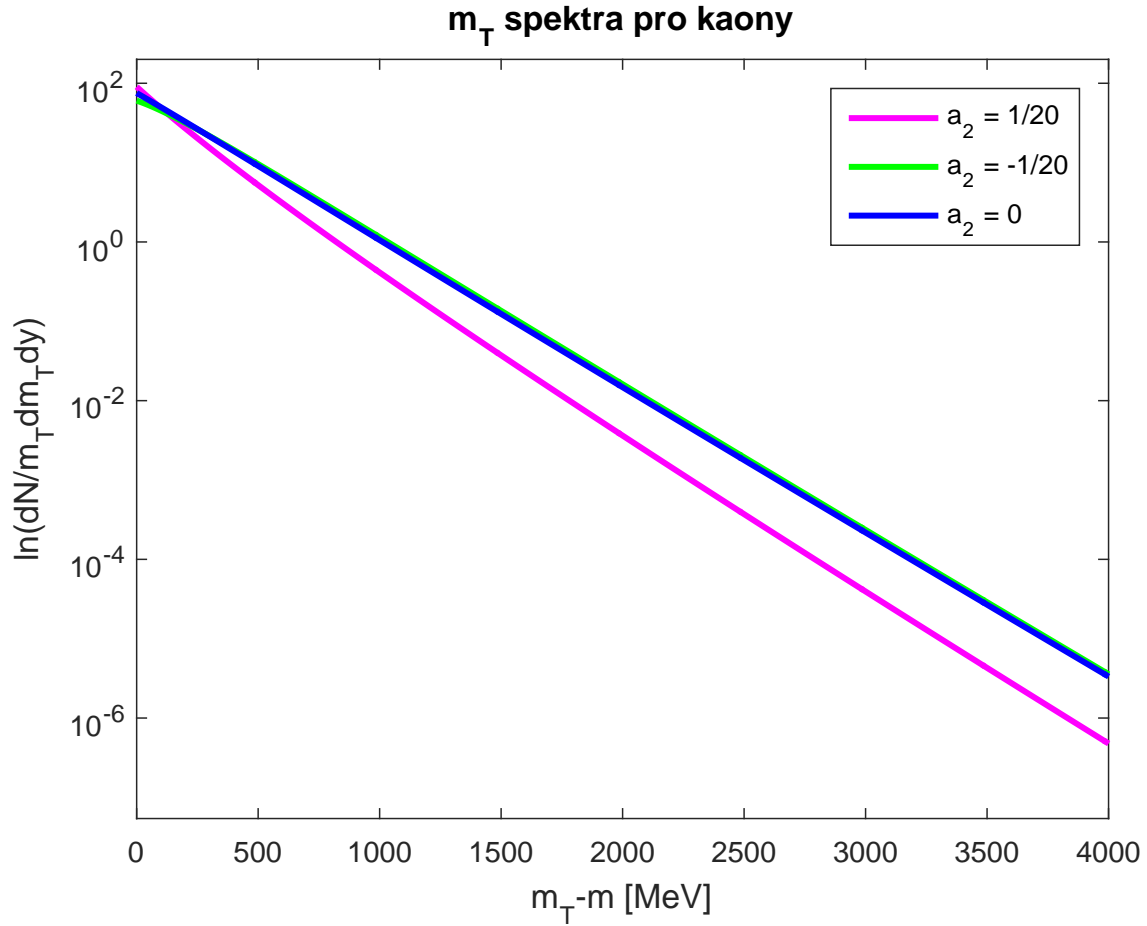
3.4.

3 RŮZNÉ TVARY NADPLOCHY VYMRZnutí A PROFILY PŘÍČNÉ RYCHLOSTI EXPANZE



Obrázek 3.3: Spektrum v příčné hmotnosti pro piony se zahrnutím příčné expanze při teplotě $T = 120$ MeV. Nadplocha vymrznutí je parametrizována parabolickou funkcí.

3.2 Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu



Obrázek 3.4: Spektrum v příčné hmotnosti pro kaony se zahrnutím příčné expanze při teplotě $T = 120$ MeV. Nadplocha vymrznutí je parametrizována parabolickou funkcí.

4 Viskozita a její vliv na spektra v příčné hybnosti

4.1 Ideální a neideální hydrodynamika

Důležitým výsledkem z relativistického těžko-iontového collideru (RHIC) je pozorování kolektivního pohybu, díky němuž byl naměřen velký eliptický tok v necentrálních srážkách. Eliptický tok je popsán druhým harmonickým azimutálním rozdělením produkovaných částic

$$v_2(p_T) = \langle \cos(2\phi) \rangle_{p_T} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \cos(2\phi) \frac{d^3 N}{dy p_T dp_T d\phi}}{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{d^3 N}{dy p_T dp_T d\phi}}, \quad (4.1)$$

kde ϕ je měřeno vzhledem k reakční rovině a $v_2(p_T)$ rychle roste jako funkce příčné hybnosti až do $p_T \approx 1.5 GeV$.

Jedním z možných vysvětlení pozorovaného toku je, že hydrodynamický tlak vzniká z rozptylu produkovaných sekundárních částic a gradienty tlaku následně řídí kolektivní pohyb.

Silná hydrodynamická odezva nastává v případě, že je "sound attenuation length"

$$\Gamma_S = \frac{4}{3} \frac{\eta}{e + p} \quad (4.2)$$

podstatně menší než škála rozpínání, $\sim \tau$. V rovnici (4.2) je η smyková viskozita, e je hustota energie a p je tlak.

Ideální hydrodynamika ($\Gamma_S = 0$) je používána k simulaci těžko-iontových srážek a k určení pozorovaného eliptického toku a jeho závislosti na centralitě, hmotnosti, energii svazku a příčné hybnosti.

Ideální hydrodynamika ale nevyhovuje z několika důvodů. Pro hodnotu $p_T \approx 1.5 GeV$ pozorovaný eliptický tok dále neroste tak, jak předpovídá hydrodynamika. Také "single-particle" spektra se odchýlí od hydrodynamických předpovědí pro $p_T \approx 1.5 GeV$. Dále HBT³ poloměry jsou podstatně menší než předpovídá ideální hydrodynamika. Vztahy a hodnoty v

³Hanbury Brown-Twiss poloměr

4.2 Viskózní korekce pro Bjorkenovu expanzi

kapitole 4.1 byly převzaty z [19].

Abychom mohli určit korekce pro ideální hydrodynamiku, musíme studovat neideální (viskózní) hydrodynamiku. V posledních letech je viskózní hydrodynamika hodně zkoumána. Studie používají různý formalismus a studují různá $v_2(p_T)$ s ohledem na počáteční smykovou viskozitu, model pro počáteční geometrii a další parametry.

Rozdělení částic po vymrznutí je dáno vztahem

$$f = f_0 + \delta f, \quad (4.3)$$

kde f_0 je rovnovážná rozdělovací funkce a δf je první korekce této funkce [18].

Efekt viskozity je dvojitý. Za prvé viskozita mění řešení pohybové rovnice. Za druhé viskozita mění lokální rovnovážnou rozdělovací funkci, jak je vidět z rovnice (4.3).

tato kapitola se tedy zabývá výpočtem první korekce tepelné rozdělovací funkce rozpínajícího se plynu pomocí smykové viskozity.

4.2 Viskózní korekce pro Bjorkenovu expanzi

Budeme uvažovat Bjorkenovu expanzi nekonečně velkého jádra bez příčného toku. V oblasti střední časoprostorové rapidity je tensor hybnosti a energie v čase τ_0 dán vztahem

$$T_0^{\mu\nu} + \eta \langle \nabla^\mu u^\nu \rangle = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{2}{3} \frac{\eta}{\tau_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{2}{3} \frac{\eta}{\tau_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau_0} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

kde $T_0^{\mu\nu}$ označuje ideální tenzor energie a hybnosti $\text{diag}(e, p, p, p)$.

Podélný tlak je snížený expanzí

$$T^{zz} = p - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau_0}, \quad (4.5)$$

4 VISKOZITA A JEJÍ VLIV NA SPEKTRA V PŘÍČNÉ HYBNOSTI

zatímco příčný tlak je zvýšený expanzí

$$T^{xx} = p + \frac{2}{3} \frac{\eta}{\tau_0}. \quad (4.6)$$

Rozdíl mezi podélným a příčným tlakem mění p_T spektrum tepelného rozdělení. Tepelné spektrum částic v příčné rovině ve vlastním čase τ_0 je dáno vztahem

$$\frac{d^2 N}{d^2 p_T dy} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p^\mu d\Sigma_\mu f, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2 N^{(0)}}{d^2 p_T dy} + \frac{d^2 N^{(1)}}{d^2 p_T dy} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p^\mu d\Sigma_\mu (f_0 + \delta f), \quad (4.8)$$

kde $d\Sigma_\mu$ je čtyřvektor popisující nadplochu vymrznutí a δf je viskózní korekce definovaná vztahem

$$\delta f = \frac{3}{8} \frac{\Gamma_s}{T^2} f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) \left(1 \pm f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) \right) p^\alpha p^\beta \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle, \quad (4.9)$$

kde $(1 + f_0)$ je pro bosony a $(1 - f_0)$ je pro fermiony.

4.3 Viskózní tenzor a blast-wave model

K odvození korekce použijeme Bjorkenovy souřadnice:

podélný čas

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (4.10)$$

časoprostorovou rapiditu

$$\eta_S = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right), \quad (4.11)$$

vzdálenost od středu fireballu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.12)$$

a úhel

$$\phi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right). \quad (4.13)$$

4.3 Viskózní tenzor a blast-wave model

V tomto souřadném systému je tenzor dán vztahem

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

Jediné nemizející Christoffelovy symboly jsou

$$\Gamma_{\eta_s \eta_s}^\tau = \tau, \quad (4.15)$$

$$\Gamma_{\tau \eta_s}^{\eta_s} = \frac{1}{\tau}, \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{\phi \phi}^r = -r, \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{r \phi}^\phi = \frac{1}{r}. \quad (4.18)$$

Hydrodynamická pole jsou parametrizována jako

$$T(\tau_0, \eta_s, r, \phi) = T_0 \Theta(R_0 - r), \quad (4.19)$$

$$u^r(\tau_0, \eta_s, r, \phi) = u_0 \frac{r}{R_0} [1 + u_2 \cos(2\phi)] \Theta(R_0 - r), \quad (4.20)$$

$$u^\phi = 0, \quad (4.21)$$

$$u^{\eta_s} = 0, \quad (4.22)$$

$$u^\tau = \sqrt{1 + (u^r)^2}. \quad (4.23)$$

Pro boost-invariantní expanzi bez příčného toku platí

$$u^{\eta_s} = u^r = u^\phi = 0, \quad (4.24)$$

$$u^\tau = 1. \quad (4.25)$$

Rychlostní pole splňuje

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (4.26)$$

Pro centrální srážky je $u_2 = 0$. Rychlost ve směru η je dána vztahem τu^{η_s} a rychlost ve směru ϕ vztahem ru^ϕ .

Jediné nenulové prostorové komponenty viskózního tenzoru jsou dány vztahy

$$\langle \nabla^r u^r \rangle = \frac{2}{3\tau}, \quad (4.27)$$

$$r^2 \langle \nabla^\phi u^\phi \rangle = \frac{2}{3\tau}, \quad (4.28)$$

$$\tau^2 \langle \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} \rangle = -\frac{4}{3\tau}. \quad (4.29)$$

Vztahy (4.27), (4.28), (4.29) jsou odvozeny v Příloze B.

4.4 Bjorkenova expanze

Čtyřhybnost je dána vztahem

$$p^\mu = (E, p^x, p^y, p^z) = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi', p_T \sin \phi', m_T \sinh y). \quad (4.30)$$

Dále platí

$$p^\tau = m_T \cosh(y - \eta_s), \quad (4.31)$$

$$\tau p^{\eta_s} = m_T \sinh(y - \eta_s), \quad (4.32)$$

$$p^r = p_T \cos(\phi - \phi'), \quad (4.33)$$

$$rp^\phi = p_T \sin(\phi - \phi'). \quad (4.34)$$

4.5 Odvození viskozity pro protony

Pro odvození viskózního tenzoru ještě potřebujeme

$$p^\phi p^\phi \langle \nabla_\phi u_\phi \rangle = p_T^2 \sin^2(\phi - \phi') \frac{2}{3\tau}, \quad (4.35)$$

$$p^{\eta_s} p^{\eta_s} \langle \nabla_{\eta_s} u_{\eta_s} \rangle = -m_T^2 \sinh^2(y - \eta_s) \frac{4}{3\tau}, \quad (4.36)$$

$$p^r p^r \langle \nabla_r u_r \rangle = p_T^2 \cos^2(\phi - \phi') \frac{2}{3\tau}. \quad (4.37)$$

Pro viskózní tenzor pak dostaneme vztah

$$p^\mu p^\nu \langle \nabla_\mu u_\nu \rangle = p_T^2 \frac{2}{3\tau} - \frac{4}{3\tau} m_T^2 \sinh^2(y - \eta_s). \quad (4.38)$$

Pro viskózní korekci δf (pro $y = 0$) pak dostaneme

$$\delta f = \frac{3}{8} \frac{\Gamma_s}{T^2} f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) p^\mu p^\nu \langle \nabla_\mu u_\nu \rangle = \frac{3}{8} \frac{\Gamma_s}{T^2} f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) \left(p_T^2 \frac{2}{3\tau} - \frac{4}{3\tau} m_T^2 \sinh^2(\eta_s) \right), \quad (4.39)$$

kde $f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right)$ je rovnovážná rozdělovací funkce.

4.5 Odvození viskozity pro protony

Podle vztahů (3.6), (3.7), (3.8) a (3.9) dostáváme pro čtyřvektor elementu nadplochy

$$d\Sigma^\mu = (\cosh \eta_s, 0, 0, \sinh \eta_s) \tau r dr d\phi d\eta_s \quad (4.40)$$

a po vynásobení čtyřhybností p^μ

$$p^\mu d\Sigma_\mu = (m_T \cosh \eta_s \cosh y - m_T \sinh \eta_s \sinh y) \tau r dr d\phi d\eta_s = m_T \cosh(y - \eta_s) \tau r d\eta_s dr d\phi. \quad (4.41)$$

Spektrum nadplochy vymrznutí s korekcí na viskozitu je dáno vztahem

$$E \frac{dN^3}{d^3p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int p^\mu d\Sigma_\mu \cdot f \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int p^\mu d\Sigma_\mu \left(f_0 \left(\frac{p \cdot u}{T} \right) + \delta f \right), \quad (4.42)$$

4 VIZKOZITA A JEJÍ VLIV NA SPEKTRA V PŘÍČNÉ HYBNOSTI

kde je spektrum nadplochy vymrznutí bez viskózní korekce dáno vztahem

$$\frac{dN^{(0)}}{m_T dm_T dy} = \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{\tau m_T}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right), \quad (4.43)$$

kde

$$\Gamma_s = \frac{4}{3} \eta' \frac{s}{e+p}, \quad (4.44)$$

kde e je hustota energie, p je tlak, s entropie a $\eta' = \frac{1}{10}$. Po dosazení teploty $T = 120 \text{ MeV}$ do parametrizace pohybových rovnic [20] získáme

$$\Gamma_s = 0,94. \quad (4.45)$$

Spektrum pro korekci na viskozitu je dáno vztahem

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(1)}}{m_T dm_T dy} &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{8\pi^2} \left[m_T p_T^2 + \frac{m_T^3}{2} \right] \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_3 \left(\frac{nm_T}{T} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Vztahy (4.43) a (4.46) jsou odvozeny v Příloze B.

Rovnice (4.42) pak přejde do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(0)}}{m_T dm_T dy} + \frac{dN^{(1)}}{m_T dm_T dy} &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{8\pi^2} \left[m_T p_T^2 + \frac{m_T^3}{2} \right] \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_3 \left(\frac{nm_T}{T} \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

kde je člen pro $n = 2$ započten dvakrát, protože pro fermiony dosazujeme do rovnice (4.9)

4.5 Odvození viskozity pro protony

$f_0(1 - f_0)$ a proto

$$f_0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{p \cdot u}{T}\right) + 1} = \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \exp\left(-\frac{nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (4.48)$$

$$f_0^2 = \sum_{n=1}^3 (-1)^{2n+2} \exp\left(-\frac{2nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (4.49)$$

$$f_0 - f_0^2 = \exp\left(-\frac{m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right) - 2 \exp\left(-\frac{2m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right) + \exp\left(-\frac{3m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right). \quad (4.50)$$

Pro

$$\tau = 10, \quad (4.51)$$

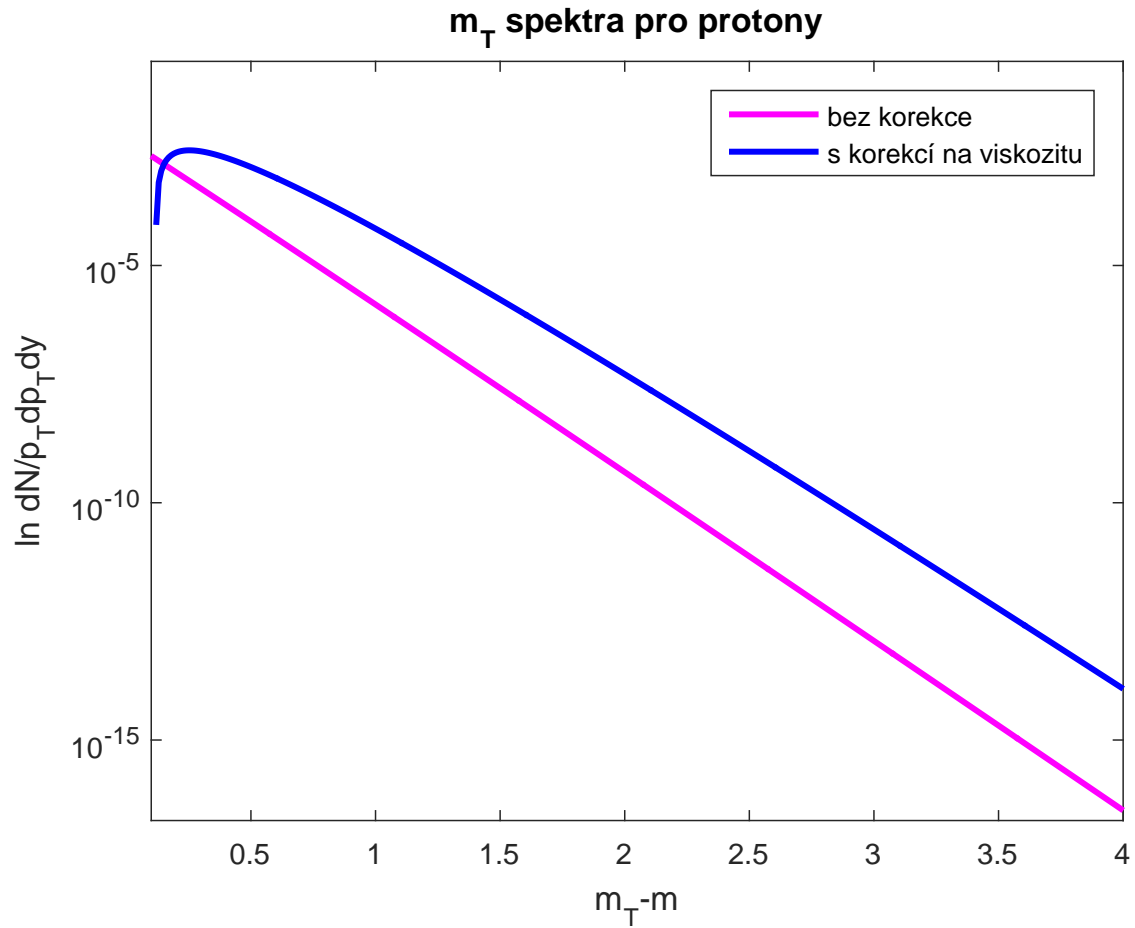
$$T = 120 \text{ MeV}, \quad (4.52)$$

$$\eta_f = 0.8, \quad (4.53)$$

$$m_p = 938 \text{ MeV}, \quad (4.54)$$

$$R = 10 \quad (4.55)$$

je spektrum pro protony vykresleno na Obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Spektrum v příčné hmotnosti pro protony se zahrnutím viskozity při teplotě $T = 120$ MeV.

4.6 Odvození viskozity pro piony a kaony

4.6 Odvození viskozity pro piony a kaony

Spektrum pro kaony a piony s korekcí na viskozitu je dáno vztahem

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(0)}}{m_T dm_T dy} + \frac{dN^{(1)}}{m_T dm_T dy} &= \sum_{n=1}^3 \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^3 \frac{1}{8\pi^2} \left[m_T p_T^2 + \frac{m_T^3}{2} \right] \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &- \sum_{n=1}^3 \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_3 \left(\frac{nm_T}{T} \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

kde je člen pro $n = 2$ započten dvakrát, protože pro fermiony dosazujeme do rovnice (4.9) $f_0(1 + f_0)$ a proto

$$f_0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{p \cdot u}{T}\right) + 1} = \sum_{n=1}^3 \exp\left(-\frac{nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (4.57)$$

$$f_0^2 = \sum_{n=1}^3 \exp\left(-\frac{2nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (4.58)$$

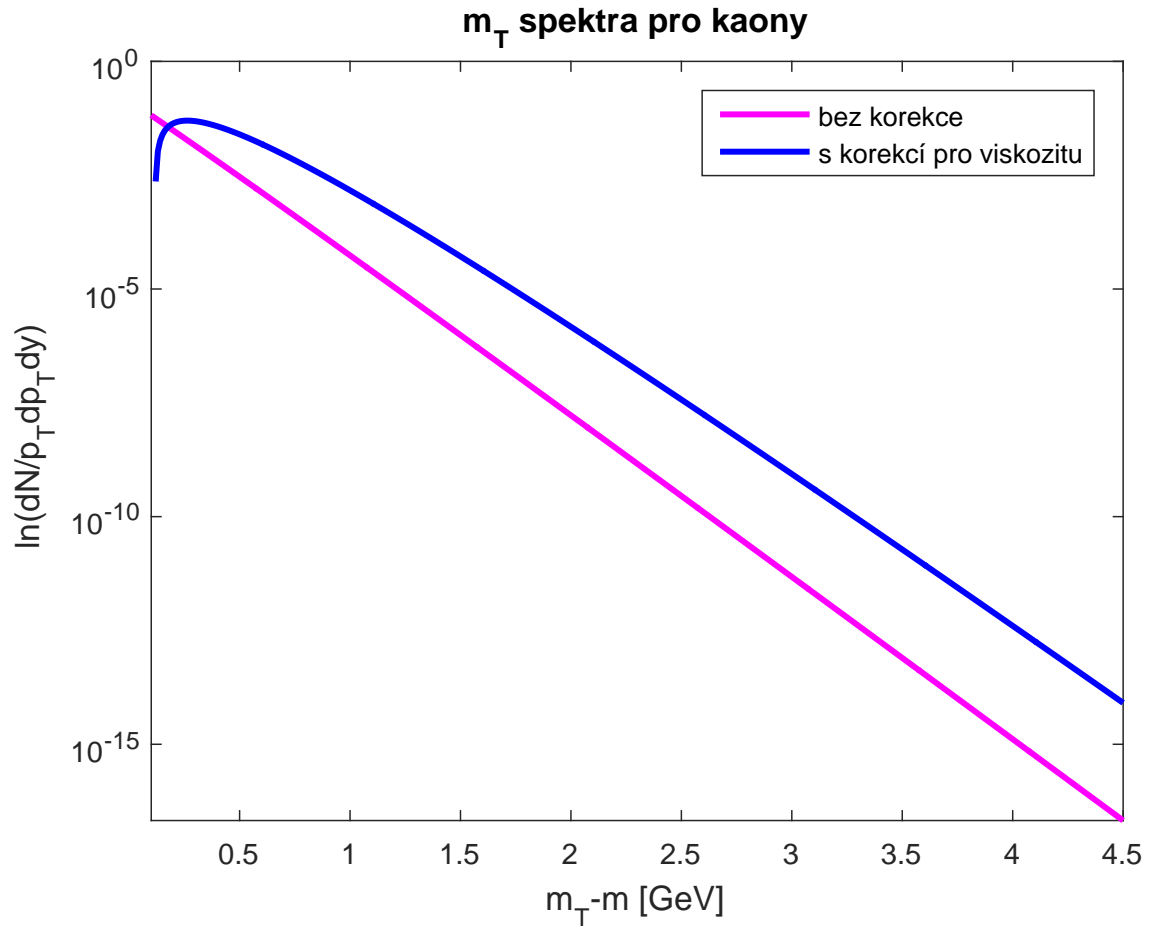
$$f_0 - f_0^2 = \exp\left(-\frac{m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right) + 2 \exp\left(-\frac{2m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right) + \exp\left(-\frac{3m_T \cosh(y - \eta_s)}{T}\right). \quad (4.59)$$

Pro

$$m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV}/c^2, \quad (4.60)$$

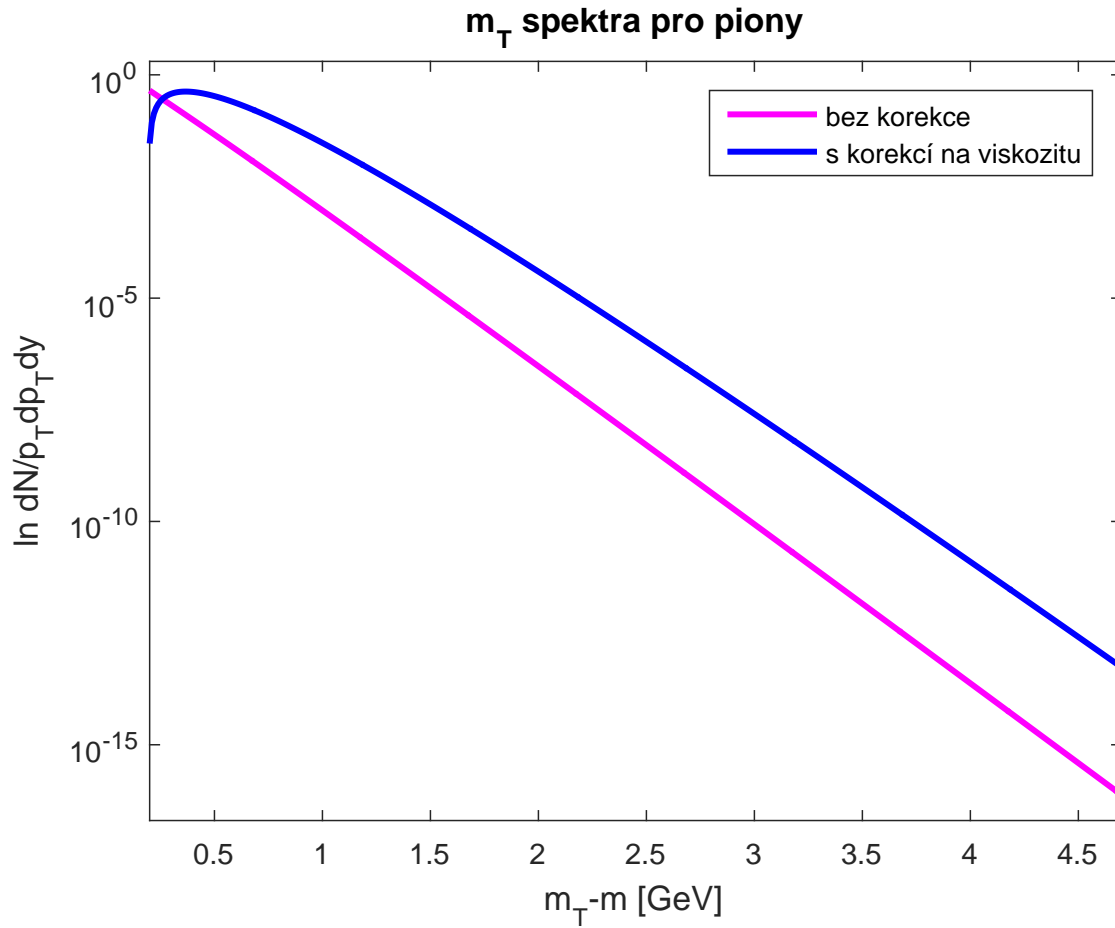
$$m_{\pi^\pm} = 494 \text{ MeV}/c^2, \quad (4.61)$$

je spektrum s korekcí na viskozitu pro kaony vykresleno na Obr.4.2 a pro piony na Obr. 4.3. Spektrum bylo odvozeno podobně jako spektrum pro protony s použitím vztahu (3.49).



Obrázek 4.2: Spektrum v příčné hmotnosti pro kaony se zahrnutím viskozity při teplotě $T = 120$ MeV.

4.6 Odvození viskozity pro piony a kaony



Obrázek 4.3: Spektrum v příčné hmotnosti pro piony se zahrnutím viskozity při teplotě $T = 120$ MeV.

4.7 Odhad vlivu viskozity na tvar spektra

Abychom byli schopni odhadnout, jaký vliv má viskozita na tvar spektra, spektrum bez započítané korekce i se započítanou korekcí zderivujeme.

Jelikož je spektrum v obou případech úměrné

$$\propto \exp\left(-\frac{m_T}{T^*}\right), \quad (4.62)$$

po zlogaritmování spektra

$$\ln \exp\left(-\frac{m_T}{T^*}\right) = -\frac{m_T}{T^*} + C \quad (4.63)$$

a následném zderivování spektra podle m_T

$$\frac{d}{dm_T} \left(\ln \exp\left(-\frac{m_T}{T^*}\right) \right) = -\frac{1}{T^*} \quad (4.64)$$

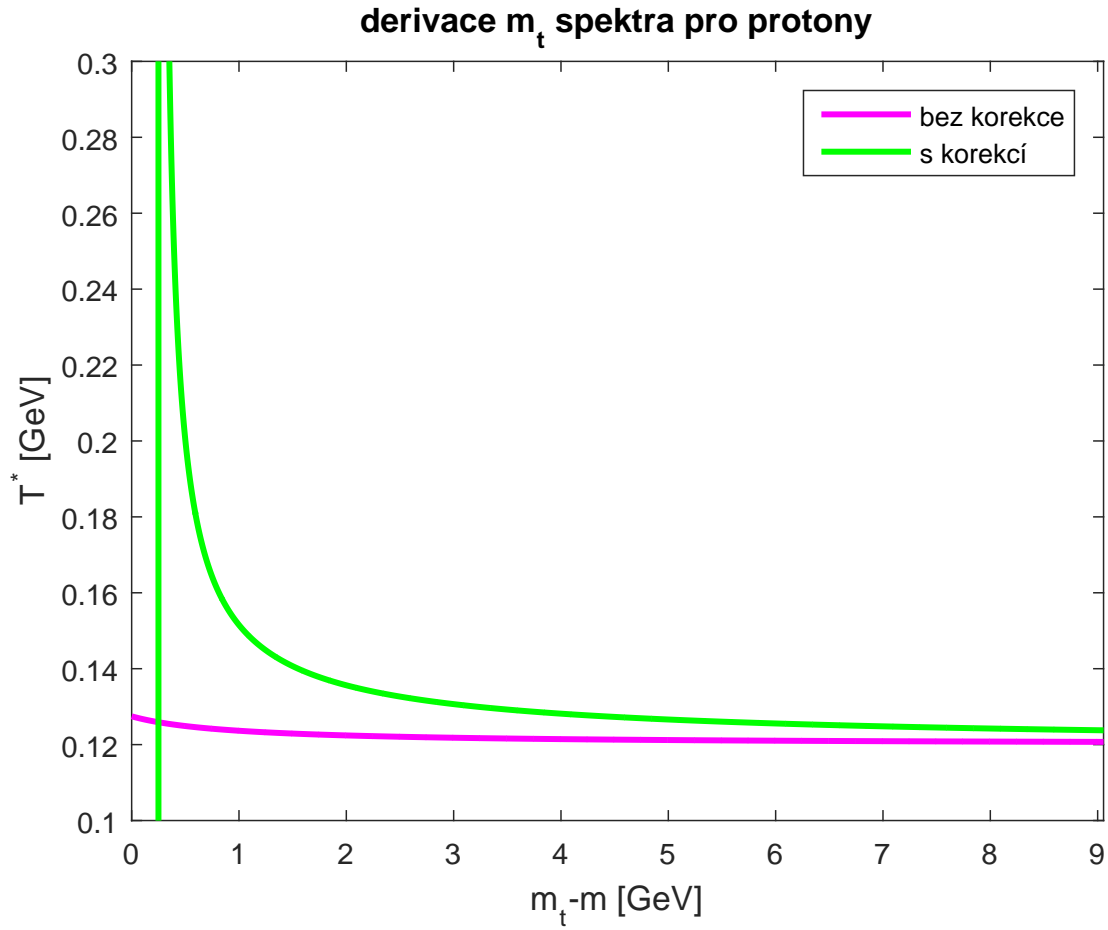
získáme graf závislosti teploty T^* na příčné hmotnosti m_T .

Teplota T^* je definovaná vztahem

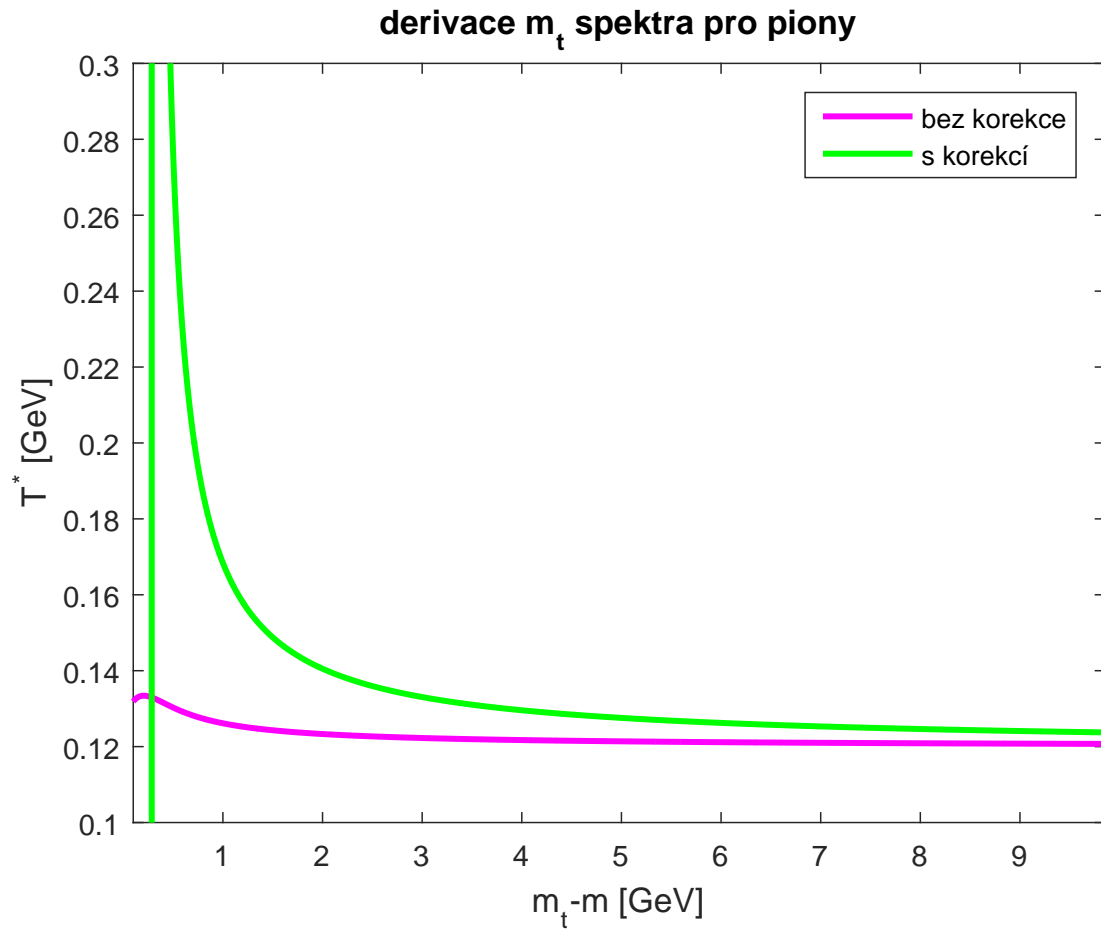
$$T^* = T + m \langle v_T^2 \rangle. \quad (4.65)$$

Pro protony je na Obr.4.4, pro piony na Obr.4.5 a pro kaony na Obr.4.6. Z grafů je patrné, že vliv viskozity na spektrum je závislý na příčné hmotnosti m_T .

4.7 Odhad vlivu viskozity na tvar spektra

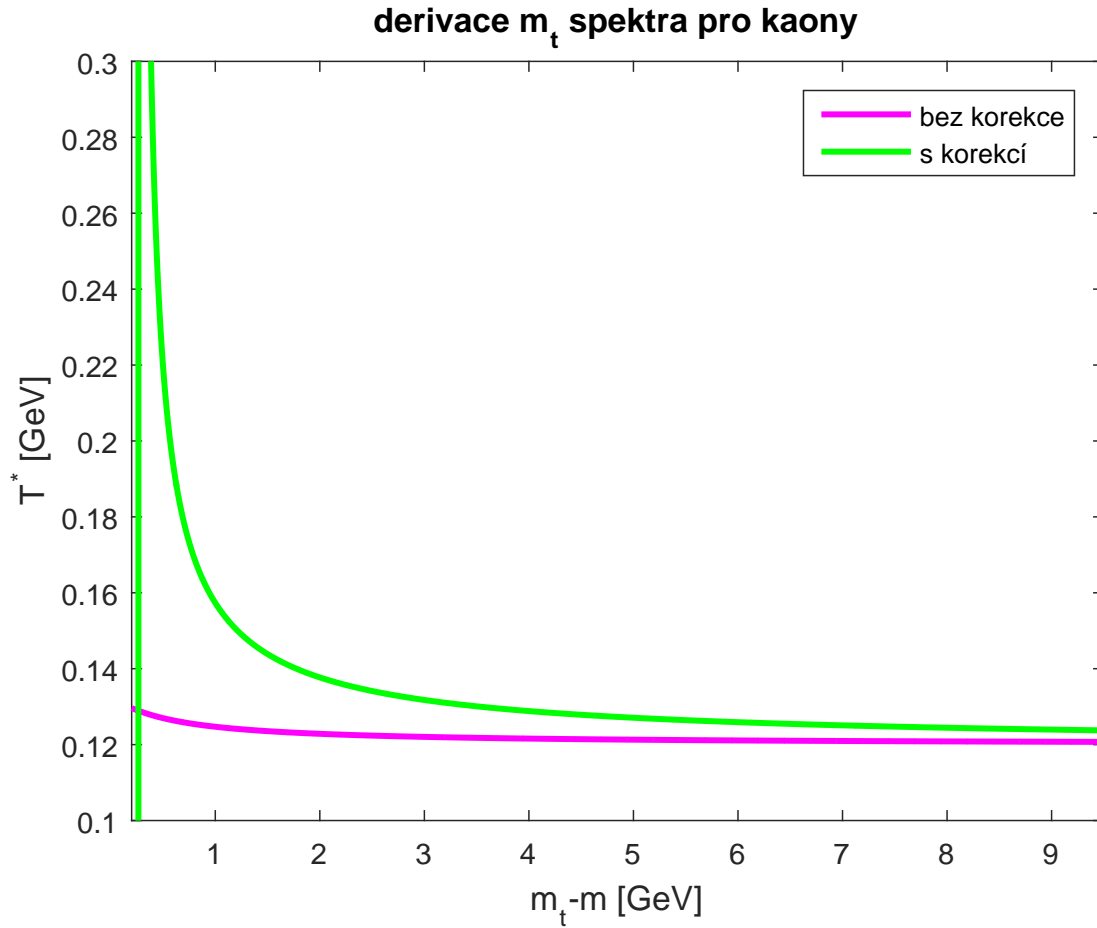


Obrázek 4.4: Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro protony se zahrnutím a bez zahrnutí korekce na viskozitu.



Obrázek 4.5: Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro piony se zahrnutím a bez zahrnutí korekce na viskozitu.

4.7 Odhad vlivu viskozity na tvar spektra



Obrázek 4.6: Graf závislosti T^* na příčné hmotnosti m_T pro kaony se zahrnutím a bez zahrnutí korekce na viskozitu.

5 Vliv produkce hadronů z rozpadů rezonancí a vliv chemického složení rezonančního plynu

Vliv rozpadu rezonancí na hadronová spektra v příčné hybnosti je studován za pomoci jednoduchého termodynamického modelu. Pro termodynamické podmínky, které jsou předpokládány ve vysoce-energetických těžko-iontových srážkách, je důležitá produkce vyšších rezonancí. Rozpad těchto rezonancí je významným příspěvkem ke spektru přímo produkovaných částic. Tento fakt potvrzují články [21] a [22].

5.1 Termodynamický model

Předpokládáme, že jsou rezonance v tepelné i chemické rovnováze. Pro každou částici nebo rezonanci R s hmotností m_R definujeme chemický potenciál

$$\mu_R = b_R \mu_b + s_R \mu_s, \quad (5.1)$$

kde b_R je baryonové číslo, s_R je podivnost, μ_b je chemický potenciál představující celkové baryonové číslo a μ_s je chemický potenciál představující celkovou podivnost fireballu. Počet N_R rezonancí R ve fireballu ($\hbar = c = k_B = 1$) je daný potom vztahem

$$N_R = g_R V \int \frac{d^3 p_R}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[\beta(E_R - \mu_R)] \pm 1}, \quad (5.2)$$

kde g_R je degenerační faktor, $E_R = \sqrt{p_R^2 + m_R^2}$ je energie rezonance R , $\beta = \frac{1}{T}$ je inverzní teplota a V je objem fireballu.

Rozdělení hybnosti je dáno vztahem

$$\frac{d^3 N_R}{dy_R dm_{TR}^2} = \frac{g_R V}{8\pi^2} \frac{m_{TR} \cosh y_R}{\exp[\beta(m_{TR} \cosh y_R - \mu_R)] \pm 1}, \quad (5.3)$$

kde

$$m_{TR} = \sqrt{p_{TR}^2 + m_R^2} \quad (5.4)$$

5.2 Rozpady rezonancí

je příčná hmotnost a

$$y_R = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_R + p_{LR}}{E_R - p_{LR}} \right) \quad (5.5)$$

je rapidita.

Boltzmanova limita vztahu (5.3) je

$$\frac{d^3 N_R}{dy_R dm_{TR}^2} = \frac{g_R V}{8\pi^2} \exp(\beta\mu_R) m_T R \cosh y_R \exp(-\beta m_{TR} \cosh y_R). \quad (5.6)$$

Vztahy z kapitoly 5.1 byly převzaty z [22].

5.2 Rozpady rezonancí

Z fireballu můžou být produkované i rezonance. Doba života těchto rezonancí je náhodná podle exponenciálního rozpadového zákona $\exp(-\Gamma\tau)$ (v klidové soustavě rezonance).

Pokud se rezonance s hmotností M rozpadá pomocí "two-body" rozpadu na dceřiné částice s hmotnostmi m_1 a m_2 , jejich energie pak budou

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}, \quad (5.7)$$

$$E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \quad (5.8)$$

Dceřiné částice se budou pohybovat od sebe s hybnostmi

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}. \quad (5.9)$$

Pokud se jedná o "three-body" rozpady, všechny hybnosti dceřiných částic leží v rovině. Rozdělení energie dceřiných částic je rovnoměrné. Energie a hybnosti dceřiných částic se tedy zachovávají

$$E_1 + E_2 + E_3 = M, \quad (5.10)$$

$$|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_2|^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_1| \cos \Theta_{12} = p_3, \quad (5.11)$$

5 Vliv produkce hadronů z rozpadů rezonancí a vliv chemického složení rezonančního plynu

kde

$$E_i = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2} \quad (5.12)$$

a Θ_{12} je úhel mezi hybnostmi \vec{p}_1 a \vec{p}_2 .

Vztahy z kapitoly 5.2 byly převzaty z [23].

5.3 DRAGON

DRAGON [23] je Monte Carlo generátor konečného stavu hadronů emitovaných při relativistických jaderných srážkách. Výhodou generátoru je možná fragmentace fireballu a emise hadronů z jednotlivých fragmentů. Fázové rozdělení fragmentů je založeno na blast wave modelu rozšířeném na azimutálně nesymetrický fireball. Model umožňuje měnit parametry generovaného konečného stavu hadronů. Rozpady rezonancí byly generovány pro piony π^- , kaony K^- a protony p .

Parametry programu byly nastaveny následovně

- Počet událostí: 10 000
- Teplota chemického vymrznutí: 166,5 MeV
- $\frac{dN}{dy}$ všech hadronů: 1 500

Teplota kinetického vymrznutí a parametr η_f byly nastaveny v závislosti na centralitě srážky.

Pro centrální srážku 0 - 5 % byly nastaveny takto:

- Teplota kinetického vymrznutí: 98 MeV
- η_f : 0,981

Pro necentrální srážku 20 - 40 %:

- Teplota kinetického vymrznutí: 115 MeV
- η_f : 0,918

5.3 DRAGON

A pro necentrální srážku 60 - 80 %:

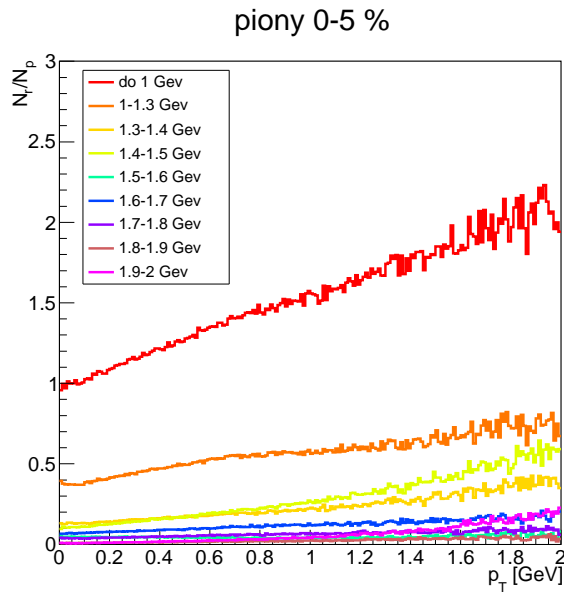
- Teplota kinetického vymrznutí: 166 MeV
- η_f : 0,6735

Hodnoty teploty kinetického vymrznutí byly převzaty z článku [21] z tabulky 2. Hodnota parametru η_f byla dopočítána podle vztahu

$$\eta_f = \frac{3}{2} \langle v_t \rangle. \quad (5.13)$$

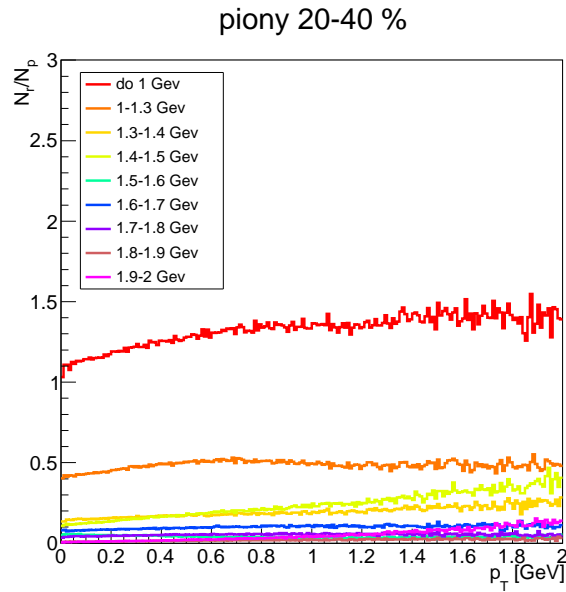
Hodnoty $\langle v_t \rangle$ jsou taktéž převzaty z článku [21] z tabulky 2.

Histogramy pro piony π^- jsou na obrázcích Obr. 5.1, Obr. 5.2 a Obr. 5.3, pro kaony K^- jsou na obrázcích Obr. 5.4, Obr. 5.5 a Obr. 5.6 a pro protony p jsou na obrázcích Obr. 5.7, Obr. 5.8 a Obr. 5.9.

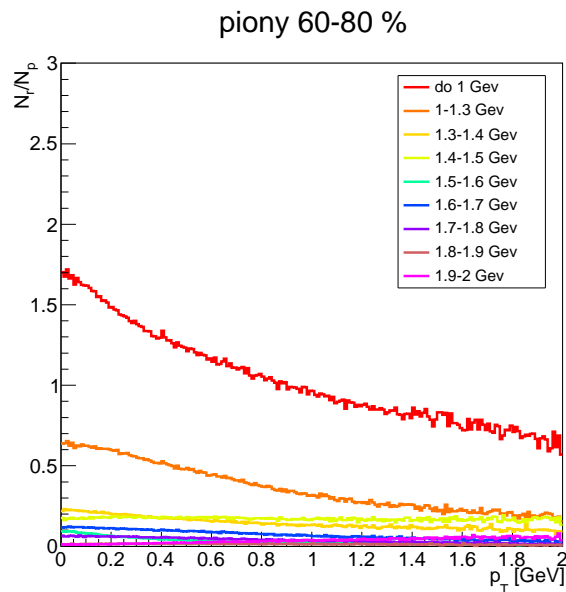


Obrázek 5.1: Histogram znázorňující poměr pionů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným pionům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro centrální srážku 0 - 5 %.

5 VLIV PRODUKCE HADRONŮ Z ROZPADŮ REZONANCÍ A VLIV CHEMICKÉHO SLOŽENÍ REZONANČNÍHO PLYNU

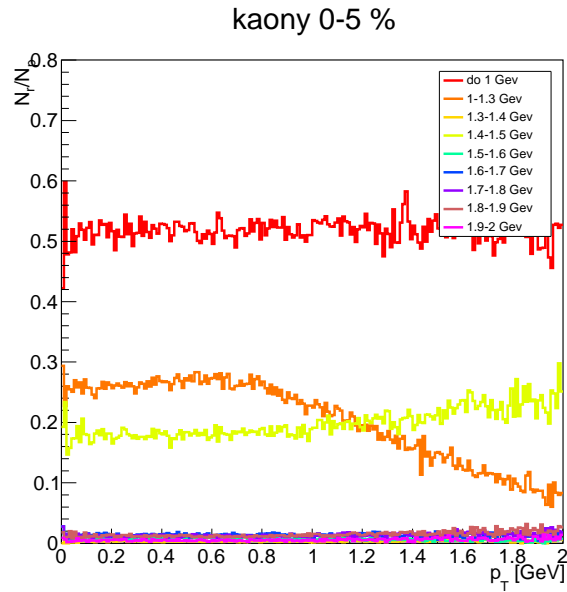


Obrázek 5.2: Histogram znázorňující poměr pionů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným pionům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 20 - 40 %.

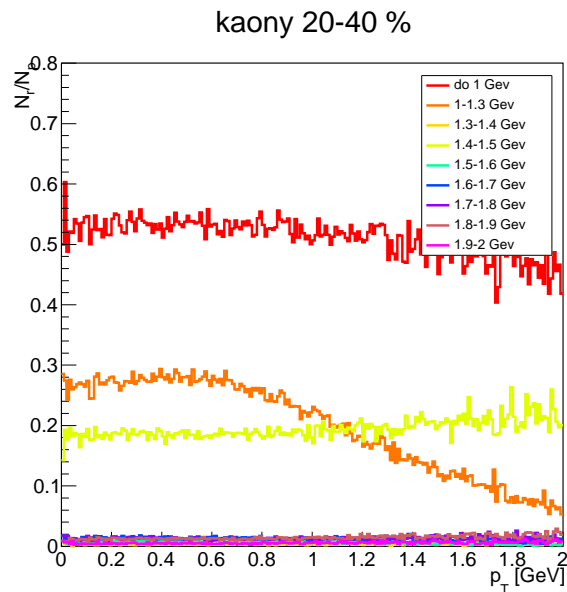


Obrázek 5.3: Histogram znázorňující poměr pionů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným pionům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 60 - 80 %.

5.3 DRAGON

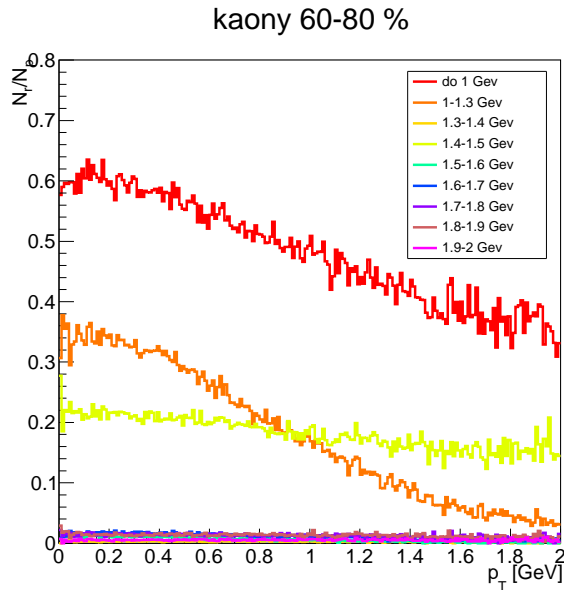


Obrázek 5.4: Histogram znázorňující poměr kaonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným kaonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro centrální srážku 0 - 5 %.

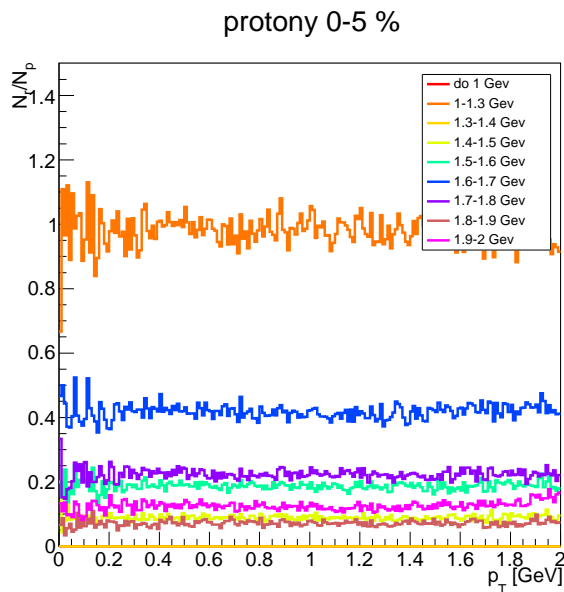


Obrázek 5.5: Histogram znázorňující poměr kaonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným kaonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 20 - 40 %.

5 Vliv produkce hadronů z rozpadů rezonancí a vliv chemického složení rezonančního plynu

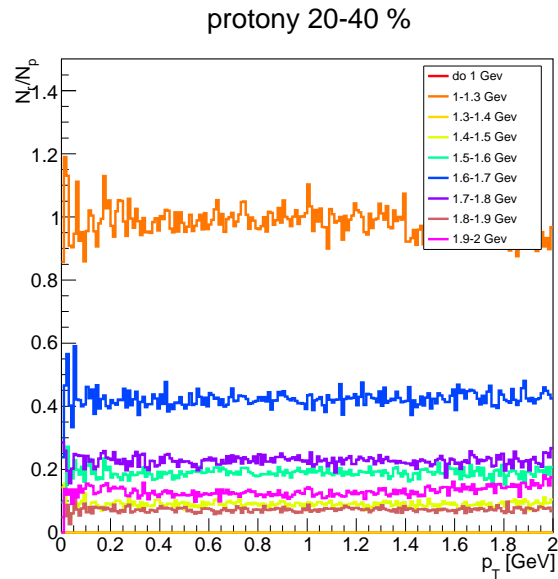


Obrázek 5.6: Histogram znázorňující poměr kaonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným kaonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 60 - 80 %.

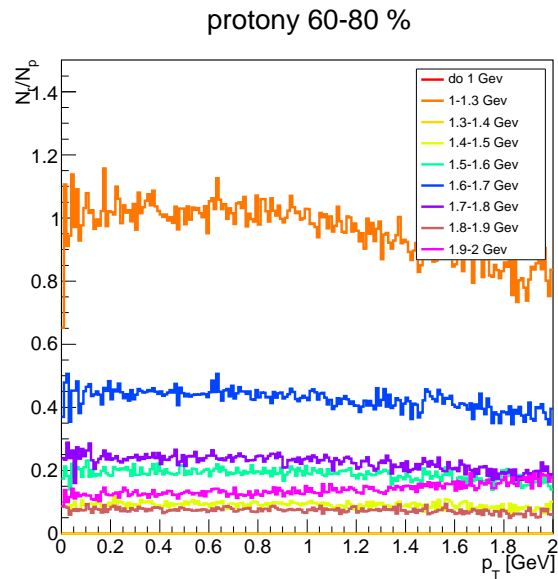


Obrázek 5.7: Histogram znázorňující poměr protonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným protonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro centrální srážku 0 - 5 %.

5.3 DRAGON



Obrázek 5.8: Histogram znázorňující poměr protonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným protonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 20 - 40 %.



Obrázek 5.9: Histogram znázorňující poměr protonů vzniklých rozpadem rezonancí ku přímo produkovaným protonům v závislosti na příčné hybnosti p_T pro necentrální srážku 60 - 80 %.

5 VLIV PRODUKCE HADRONŮ Z ROZPADŮ REZONANCÍ A VLIV CHEMICKÉHO SLOŽENÍ REZONANČNÍHO PLYNU

Z obrázků Obr. 5.1, Obr. 5.2 a Obr. 5.3 je vidět, že na spektra přímo produkovaných pionů mají největší vliv piony vzniklé z lehčích rezonancí o hmotnostech do 1,5 GeV. Největší vliv pak mají rezonance do 1 GeV. V této oblasti se nacházejí např. rezonance η , ρ , Ω , K a Σ .

Z obrázků Obr. 5.4, Obr. 5.5 a Obr. 5.6 je zřejmé, že pro spektra přímo produkovaných kaonů jsou nejdůležitější kaony vzniklé rozpadem lehčích rezonancí o hmotnostech do 1,3 GeV a potom rozpad rezonancí o hmotnostech od 1,4 GeV do 1,5 GeV. V této oblasti se nacházejí např. rezonance η , ρ , Ω a Σ .

Na obrázkách Obr. 5.7, Obr. 5.8 a Obr. 5.9 vidíme, že na spektra přímo produkovaných protonů mají největší vliv protony vzniklé z rezonancí o hmotnostech od 1 GeV do 1,3 GeV a potom rozpady těžších rezonancí o hmotnostech od 1,5 GeV do 1,8 GeV. V této oblasti se nacházejí např. rezonance Δ , $\Lambda(1600, 1800)$, $\sigma(1660, 1670)$, $N(1520)$ nebo $\Xi(1690)$.

Závěr

Cílem této práce bylo studium různých tvarů nadplochy vymrznutí na tvar spekter v příčné hybnosti a také zkoumání vlivu viskozity a rozpadů rezonancí na tvar spektra v příčné hybnosti.

V první kapitole jsme uvedli základní poznatky o těžko-iontových srážkách a kvantové chromodynamice. Dále jsme se zaměřily na vlastnosti kvark-gluonového plazmatu a na analogii mezi fyzikou relativistických srážek a fyzikou raného vesmíru. Ve druhé kapitole jsme zkoumali vliv podélné a příčné expanze na tvar spektra v příčné hybnosti. V další kapitole jsme odvodili tvar nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu pro piony, protony a kaony. Následující kapitola byla věnována vlivu viskozity a odvození korekce na viskozitu pro spektra v příčné hybnosti. Zjistili jsme, že vliv viskozity není zanedbatelný, obzvláště při malých hodnotách $m_T - m$. V poslední kapitole je popsán vliv rozpadu rezonancí na tvar spektra přímo produkovaných částic. Simulace rozpadu rezonancí byla provedena pomocí Monte Carlo generátoru DRAGON [23] pro centrální srážky 0 - 5 % a pro necentrální srážky 20 - 40 % a 60 - 80 %. Zjistili jsme, že částice vzniklé z rozpadu rezonancí významně přispívají ke spektru přímo produkovaných částic.

A PŘÍLOHA: ODVOZENÍ TVARU NADPLOCHY VYMRZnutí PRO
PARABOLICKOU PARAMETRIZACI FIREBALLU

Příloha A

A Příloha: Odvození tvaru nadplochy vymrznutí pro parabolickou parametrizaci fireballu

Pro infinitezimální elementy plochy podle vzorců (3.6),(3.7),(3.8),(3.9) dostaneme

$$\begin{aligned}
 d\Sigma^0 &= \left| \begin{array}{ccc} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sinh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel} \end{array} \right| d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= (r \cos^2 \phi \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel} + r \sin^2 \phi \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel}) d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= r \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel} d\eta_{\parallel} dr d\phi,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 d\Sigma^1 &= \left| \begin{array}{ccc} \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sinh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel} \\ \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cosh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \sinh \eta_{\parallel} \end{array} \right| d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= \left(r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cosh^2 \eta_{\parallel} \cos \phi - r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cos \phi \sinh^2 \eta_{\parallel} \right) d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cos \phi d\eta_{\parallel} dr d\phi,
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 d\Sigma^2 &= - \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sinh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \cosh \eta_{\parallel} \\ \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cosh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \sinh \eta_{\parallel} \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{array} \right| d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= - \left(-r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sin \phi \cosh^2 \eta_{\parallel} + r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sin \phi \sinh^2 \eta_{\parallel} \right) d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
 &= r \tau_f(r) \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \sin \phi d\eta_{\parallel} dr d\phi,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
d\Sigma^3 &= \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \cosh \eta_{\parallel} & 0 & \tau_f(r) \sinh \eta_{\parallel} \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \end{array} \right| d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
&= (\tau_f(r) r \cos^2 \phi \sinh \eta_{\parallel} + \tau_f(r) \sin^2 \phi \sinh \eta_{\parallel}) d\eta_{\parallel} dr d\phi \\
&= r \tau_f(r) \sinh \eta_{\parallel} d\eta_{\parallel} dr d\phi.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Podrobné odvození integrálu (3.29) pro příčné hmotnostní spektrum fermionů,

$$\begin{aligned}
E \frac{dN}{d^3p} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} m_T \cosh(y - \eta_{\parallel}) d\eta_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \tau_f(r) r \\
&\quad \times \exp\left(\frac{np_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi')}{T}\right) \cdot \exp\left(-\frac{nm_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_{\parallel})}{T}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^R \frac{r dr}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} m_T \tau_f(r) \cosh \chi d\chi I_0\left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T}\right) \times \exp\left(-\frac{m_T n \cosh \eta_{\parallel} \cosh \chi}{T}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{m_T}{(2\pi^2)} \int_0^R r \tau_f dr I_0\left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T}\right) K_1\left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T}\right),
\end{aligned} \tag{A.5}$$

kde jsme provedli substituci

$$|y - \eta_{\parallel} = \chi|. \tag{A.6}$$

Podrobné odvození integrálu (3.34) pro příčné hmotnostní spektrum fermionů,

$$\begin{aligned}
E \frac{dN}{d^3p} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^3} p_T \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{\parallel} \int_0^R \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \tau_f(r) r dr \int_0^{2\pi} d\phi \cos(\phi - \phi') \\
&\quad \times \exp\left(\frac{np_T \sinh \eta_t \cos(\phi - \phi')}{T}\right) \times \exp\left(-\frac{nm_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_{\parallel})}{T}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^2} p_T \int_0^R \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \tau_f(r) r dr \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi I_1\left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T}\right) \times \exp\left(-\frac{m_T n \cosh \eta_{\parallel} \cosh \chi}{T}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2\pi^2)} p_T \int_0^R \frac{\partial \tau_f(r)}{\partial r} \tau_f(r) r dr I_1\left(\frac{np_T \sinh \eta_t}{T}\right) K_0\left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T}\right),
\end{aligned} \tag{A.7}$$

kde jsme provedli substituci

$$|y - \eta_{\parallel} = \chi|. \tag{A.8}$$

Příloha B

B Příloha: Odvození korekce na viskozitu

Ke spočítání tenzoru viskozity potřebujeme definovat diferenciální operátor

$$\nabla^\alpha = \Delta^{\alpha\beta} d_\beta, \quad (\text{B.1})$$

kde $\Delta^{\alpha\beta}$ označuje

$$\Delta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \quad (\text{B.2})$$

a d_β označuje kovariantní derivaci

$$d_\beta u^\alpha = \partial_\beta u^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha u^\mu. \quad (\text{B.3})$$

Viskózní tenzor je pak daný vztahem

$$\eta \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle, \quad (\text{B.4})$$

kde

$$\langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle \equiv \nabla_\alpha u_\beta \nabla_\beta u_\alpha - \frac{2}{3} \Delta_{\alpha\beta} \nabla_\gamma u^\gamma. \quad (\text{B.5})$$

B.1 Odvození prostorových komponent viskózního tenzoru

Odvození $\langle \nabla^r u^r \rangle$:

$$\langle \nabla^r u^r \rangle = 2\nabla^r u^r - \frac{2}{3} \Delta^{rr} \nabla^\gamma u_\gamma = -2\partial_r u^r - 2u^r Du^r - \frac{2}{3} \Delta^{rr} \nabla^\gamma u_\gamma, \quad (\text{B.6})$$

kde

$$\begin{aligned} 2\nabla^r u^r &= 2\Delta^{r\beta} d_\beta u^r = 2(g^{r\beta} - u^r u^\beta) d_\beta u^r = 2g^{r\beta} d_\beta u^r - 2u^r Du^r = 2g^{rr} (\partial_r u^r + \Gamma_{\mu r}^r u^\mu) - 2u^r Du^r = \\ &= -2\partial_r u^r - 2 \cdot 0 - 2u^r Du^r = -2\partial_r u^r - 2u^r Du^r. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Odvození $r^2 \langle \nabla^\phi u^\phi \rangle$:

$$r^2 \langle \nabla^\phi u^\phi \rangle = 2r^2 \nabla^\phi u^\phi - \frac{2}{3} r^2 \Delta^{\phi\phi} \nabla^\gamma u_\gamma = -2\partial_\phi u^\phi - 2\frac{u^r}{r} - 2r^2 u^\phi Du^\phi - \frac{2}{3} r^2 \Delta^{\phi\phi} \nabla^\gamma u_\gamma, \quad (\text{B.8})$$

B.1 Odvození prostorových komponent viskózního tenzoru

kde

$$\begin{aligned}
2r^2 \nabla^\phi u^\phi &= 2r^2 \Delta^{\phi\beta} d_\beta u^\phi = 2r^2 (g^{\phi\beta} - u^\phi u^\beta) d_\beta u^\phi = 2r^2 g^{\phi\beta} d_\beta u^\phi - 2r^2 u^\phi Du^\phi \\
&= 2r^2 g^{\phi\beta} (\partial_\beta u^\phi + \Gamma_{\mu\beta}^\phi u^\mu) - 2r^2 u^\phi Du^\phi = 2r^2 g^{\phi\phi} \partial_\phi u^\phi + 2r^2 g^{\phi\phi} \Gamma_{r\phi}^\phi u^r - 2r^2 u^\phi Du^\phi \\
&= -2\partial_\phi u^\phi - 2\frac{u^r}{r} - 2r^2 u^\phi Du^\phi.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Odvození $r \langle \nabla^r u^\phi \rangle$:

$$\begin{aligned}
r \langle \nabla^r u^\phi \rangle &= r \nabla^r u^\phi + r \nabla^\phi u^r - \frac{2}{3} r \Delta^{r\phi} \nabla^\gamma u_\gamma \\
&= -\frac{1}{r} \partial_\phi u^r - r \partial_r u^\phi - r u^\phi Du^r - \frac{2}{3} r \Delta^{r\phi} \nabla^\gamma u_\gamma,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

kde

$$\begin{aligned}
r \nabla^r u^\phi &= r \Delta^{r\beta} d_\beta u^\phi = r (g^{r\beta} - u^r u^\beta) d_\beta u^\phi = r g^{r\beta} d_\beta u^\phi - r u^r u^\beta d_\beta u^\phi \\
&= r g^{r\beta} d_\beta u^\phi - r u^r Du^\phi = r g^{r\beta} (\partial_\beta u^\phi + \Gamma_{\mu\beta}^\phi) - r u^r Du^\phi \\
&= r g^{r\beta} \partial_\beta u^\phi + r g^{r\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\phi u^\mu - r u^r Du^\phi = -r \partial_r u^\phi - r u^r Du^\phi - u^\phi
\end{aligned} \tag{B.11}$$

a

$$\begin{aligned}
r \nabla^\phi u^r &= r \Delta^{\phi\beta} d_\beta u^r = r (g^{\phi\beta} - u^\phi u^\beta) d_\beta u^r = r g^{\phi\beta} d_\beta u^r - r u^\phi Du^r \\
&= r g^{\phi\beta} (\partial_\beta u^r + \Gamma_{\mu\beta}^r u^\mu) - r u^\phi Du^r \\
&= r g^{\phi\phi} \partial_\phi u^r + r g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r u^\phi = -\frac{1}{r} \partial_\phi u^r - r u^\phi Du^r + u^\phi.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Odvození $\tau^2 \langle \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} \rangle$:

$$\tau^2 \langle \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} \rangle = 2\tau^2 \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} - \frac{2}{3} \tau^2 \Delta^{\eta_s \eta_s} \nabla^\gamma u_\gamma = -2\partial_{\eta_s} u^{\eta_s} - \frac{2}{\tau} u^\tau - 2\tau^2 u^{\eta_s} Du^{\eta_s} - \frac{2}{3} \tau^2 \Delta^{\eta_s \eta_s} \nabla^\gamma u_\gamma, \tag{B.13}$$

kde

$$\begin{aligned}
2\tau^2 \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} &= 2\tau^2 \Delta^{\eta_s \beta} d_\beta u^{\eta_s} = 2\tau^2 (g^{\eta_s \beta} - u^{\eta_s} u^\beta) d_\beta u^{\eta_s} = 2\tau^2 g^{\eta_s \eta_s} d_{\eta_s} u^{\eta_s} - 2\tau^2 u^{\eta_s} Du^{\eta_s} \\
&= -2\partial_{\eta_s} u^{\eta_s} - \Gamma_{\mu\eta_s}^{\eta_s} u^{\eta_s} - 2\tau^2 u^{\eta_s} Du^{\eta_s} = -2\partial_{\eta_s} u^{\eta_s} - 2\frac{u^\tau}{\tau} - 2\tau^2 u^{\eta_s} Du^{\eta_s}.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Ve všech vztazích je

$$\nabla^\gamma u_\gamma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} u^\mu), \tag{B.15}$$

kde $\sqrt{-g} = \tau r$ a g je determinant metrického tenzoru.

B PŘÍLOHA: ODVOZENÍ KOREKCE NA VISKOZITU

Pro

$$\mu = \tau \Rightarrow \frac{1}{\tau r} = \partial_\tau(\tau r u^\tau) = \frac{1}{\tau} u^\tau + \partial_\tau u^\tau, \quad (\text{B.16})$$

$$\mu = \phi \Rightarrow \frac{1}{\tau r} \partial_\phi(\tau r u^\phi) = \partial_\phi u^\phi, \quad (\text{B.17})$$

$$\mu = r \Rightarrow \frac{1}{\tau r} \partial_r(\tau r u^r) = \frac{1}{r} u^r + \partial_r u^r, \quad (\text{B.18})$$

$$\mu = \eta_s \Rightarrow \frac{1}{\tau r} \partial_{\eta_s}(\tau r u^{\eta_s}) = \partial_{\eta_s} u^{\eta_s} \quad (\text{B.19})$$

pak rovnice (B.12) přejde do tvaru

$$\nabla^\gamma u_\gamma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} u^\mu) = \frac{u^\tau}{\tau} + \frac{u^r}{r} + \partial_\phi u^\phi + \partial_{\eta_s} u^{\eta_s} + \partial_\tau u^\tau + \partial_r u^r. \quad (\text{B.20})$$

Časové derivace jsou v klidové soustavě dány vztahem

$$Du^\mu = u^\alpha d_\alpha u^\mu. \quad (\text{B.21})$$

Pro

$$\begin{aligned} \mu = r &\Rightarrow Du^r = u^\alpha d_\alpha u^r = u^\tau \partial_\tau u^r + u^r \partial_r u^r + u^\phi \partial_\phi u^r + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s} u^r + u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^r u^\mu \\ &= u^\tau \partial_\tau u^r + u^r \partial_r u^r + u^\phi \partial_\phi u^r + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s} u^r + u^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r u^\phi = u^\tau \partial_\tau u^r + u^r \partial_r u^r + u^\phi \partial_\phi u^r - r(u^\phi)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \mu = \phi &\Rightarrow r Du^\phi = u^\tau \partial_\tau(r u^\phi) + u^r \partial_r(r u^\phi) + u^\phi \partial_\phi(r u^\phi) + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s}(r u^\phi) + r u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\phi u^\mu \\ &= u^\tau \partial_\tau(r u^\phi) + u^r \partial_r(r u^\phi) + u^\phi \partial_\phi(r u^\phi) + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s}(r u^\phi) + u^\phi u^r, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \mu = \eta_s &\Rightarrow \tau Du^{\eta_s} = u^\tau \partial_\tau(\tau u^{\eta_s}) + u^r \partial_r(\tau u^{\eta_s}) + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s}(\tau u^{\eta_s}) + u^\phi \partial_\phi(\tau u^{\eta_s}) + \tau u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta_s} u^\mu \\ &= u^\tau \partial_\tau(\tau u^{\eta_s}) + u^r \partial_r(\tau u^{\eta_s}) + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s}(\tau u^{\eta_s}) + u^\phi \partial_\phi(\tau u^{\eta_s}) + \tau u^{\eta_s} \Gamma_{\tau\eta_s}^{\eta_s} u^\tau \\ &= u^\tau \partial_\tau(\tau u^{\eta_s}) + u^r \partial_r(\tau u^{\eta_s}) + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s}(\tau u^{\eta_s}) + u^\phi \partial_\phi(\tau u^{\eta_s}) + u^{\eta_s} u^\tau, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \mu = \tau &\Rightarrow Du^\tau = u^\tau \partial_\tau u^\tau + u^r \partial_r u^\tau + u^\phi \partial_\phi u^\tau + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s} u^\tau + u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\tau u^\mu \\ &= u^\tau \partial_\tau u^\tau + u^r \partial_r u^\tau + u^\phi \partial_\phi u^\tau + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s} u^\tau + u^{\eta_s} \Gamma_{\eta_s \eta_s}^\tau u^{\eta_s} \\ &= u^\tau \partial_\tau u^\tau + u^r \partial_r u^\tau + u^\phi \partial_\phi u^\tau + u^{\eta_s} \partial_{\eta_s} u^\tau + \tau (u^{\eta_s})^2. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Časové komponenty jsou spočítány z $\langle \nabla^\alpha u^\beta \rangle u_\beta = 0$. Časové derivace $\partial_\tau u^\phi$, $\partial_\tau u^r$ a $\partial_\tau u^\tau$ zmizí, převzato z [19].

Pro rovnice (B.6), (B.8), (B.10) a (B.13) pak dostáváme za použití výše odvozených

B.2 Odvození spektra v příčné hmotnosti pro protony s korekcí na viskozitu

vztahů a za předpokladu, že pro Bjorkenovu expanzi platí

$$u^\phi = 0, \quad (\text{B.26})$$

$$u^{\eta_s} = 0, \quad (\text{B.27})$$

$$u^r = 0, \quad (\text{B.28})$$

$$u^\tau = 1 \quad (\text{B.29})$$

$$r \langle \nabla^r u^\phi \rangle = -\frac{2}{3}r(g^{r\phi} - u^r u^\phi) \left(\frac{u^\tau}{\tau} + \frac{u^r}{r} + 0 \right) = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} r^2 \langle \nabla^\phi u^\phi \rangle &= -2\frac{u^r}{r} - \frac{2}{3}r^2 \left(-\frac{1}{r^2} - u^\phi u^\phi \right) \left(\frac{u^\tau}{\tau} + \frac{u^r}{r} + \partial_r u^r + \partial_\tau u^\tau \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{u^\tau}{\tau} = \frac{2}{3\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla^r u^r \rangle &= -2\partial_r u^r - 2u^r D u^r - \frac{2}{3}(g^{rr} - u^r u^r) \left(\frac{u^\tau}{\tau} + \frac{u^r}{r} + \partial_r u^r + \partial_\tau u^\tau \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{u^\tau}{\tau} = \frac{2}{3\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \tau^2 \langle \nabla^{\eta_s} u^{\eta_s} \rangle &= -2\frac{u^\tau}{\tau} - \frac{2}{3}\tau^2(g^{\eta_s \eta_s} - u^{\eta_s} u^{\eta_s}) \left(\frac{u^\tau}{\tau} + \frac{u^r}{r} \right) = -\frac{2}{\tau} + \frac{2}{3\tau^2}\tau^2 \frac{u^\tau}{\tau} \\ &= -\frac{2}{\tau} + \frac{2}{3\tau} = -\frac{4}{3\tau}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

B.2 Odvození spektra v příčné hmotnosti pro protony s korekcí na viskozitu

Pro čtyřrychlost platí

$$u^\mu = (\cosh \eta_s, 0, 0, \cosh \eta_t) \quad (\text{B.34})$$

a pro čtyřhybnost

$$p^\mu = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi', p_T \sin \phi', m_T \sinh y). \quad (\text{B.35})$$

Vynásobením vztahů (B.34) a (B.35) dostaneme

$$p^\mu u_\mu = m_T \cosh \eta_t \cosh(y - \eta_s). \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dN^{(0)}}{m_T dm_T dy} + \frac{dN^{(1)}}{m_T dm_T dy} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int p^\mu d\Sigma_\mu \left(f_0 \left(\frac{p^\mu u_\mu}{T} \right) + \delta f \right) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_T r \tau \cosh(y - \eta_s) dr d\phi d\eta_s \frac{1}{\exp \left[\frac{m_T \cosh(y - \eta_s)}{T} \right] + 1} \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_T r \tau \cosh(y - \eta_s) dr d\phi d\eta_s \frac{1}{\exp \left[\frac{m_T \cosh(y - \eta_s)}{T} \right] + 1} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\frac{3}{8} \frac{\Gamma_s}{T^2} \left(\frac{2p_T^2}{3\tau} - \frac{4m_T^2}{3\tau} \sinh^2 \eta_s \right) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} m_T r \tau \cosh(y - \eta_s) dr d\phi d\eta_s \exp \left[\frac{-nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T} \right] \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} m_T r \tau \cosh(y - \eta_s) dr d\phi d\eta_s \exp \left[\frac{-nm_T \cosh(y - \eta_s)}{T} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\frac{3}{8} \frac{\Gamma_s}{T^2} \left(\frac{2p_T^2}{3\tau} - \frac{4m_T^2}{3\tau} \sinh^2 \eta_s \right) \right] \tag{B.37} \\
 &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{(2\pi^2)} \frac{3}{8} \frac{\Gamma_s m_T}{T^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} \cosh \chi r dr \exp \left(\frac{-nm_T \cosh \chi}{T} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\frac{2p_T^2}{3\tau} - \frac{4m_T^2}{3\tau} \sinh^2 \eta_s \right] d\chi \\
 &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T p_T^2}{8\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\
 &- \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{4\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} r dr \cosh \chi \sinh^2 \chi \exp \left(\frac{-nm_T \cosh \chi}{T} \right) d\chi,
 \end{aligned}$$

B.2 Odvození spektra v příčné hmotnosti pro protony s korekcí na viskozitu

kde

$$\begin{aligned} \cosh \chi \cdot \sinh^2 \chi &= \frac{1}{2} [\cosh \chi \cdot \cosh 2\chi - \cosh \chi] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cosh \chi + \frac{1}{2} \cosh 3\chi - \cosh \chi \right] \\ &= \frac{1}{4} \cosh 3\chi - \frac{1}{4} \cosh \chi. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Pak rovnice (B.37) přejde do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(0)}}{m_T dm_T dy} + \frac{dN^{(1)}}{m_T dm_T dy} &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T p_T^2}{8\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} r dr \cosh \chi \exp \left(\frac{-nm_T \cosh \chi}{T} \right) d\chi \\ &\quad - \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R \int_0^{+\infty} r dr \cosh 3\chi \exp \left(\frac{-nm_T \cosh \chi}{T} \right) d\chi \\ &= \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T \cosh \eta_t}{T} \right) + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T p_T^2}{8\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) - \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_3 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad = \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T \tau}{2\pi^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{8\pi^2} \left[m_T p_T^2 + \frac{m_T^3}{2} \right] \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_1 \left(\frac{nm_T}{T} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{m_T^3}{16\pi^2} \frac{\Gamma_s}{T^2} \int_0^R r dr K_3 \left(\frac{nm_T}{T} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

kde K_3 je modifikovaná Besselova funkce definovaná vztahem (3.31).

Reference

- [1] FLORKOWSKI, Wojciech. Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions. London: World Scientific, 2010, xix, 416 p. ISBN 98-142-8066-6.
- [2] K. G. Wilson, "Confinement of quarks," Phys. Rev. D10 (1974).
- [3] The Physics of the Quark-Gluon Plasma, Introductory Lectures, Lecture Notes in Physics 785, S. Sarkar, H. Satz, B. Sinha.
- [4] J. C. Collins and M. J. Perry, "Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks?," Phys. Rev. Lett. 34 (1975) 1353.
- [5] Malý třesk: https://u.osu.edu/vishnu/files/2014/09/little_bang_10wt2pd.jpg. [online 23/04/2016]
- [6] N. Cabibbo and G. Parisi, "Exponential hadronic spectrum and quark liberation," Phys. Lett. B59 (1975) 67.
- [7] E. V. Shuryak, "Quark-gluon plasma and hadronic production of leptons, photons and pions," Phys. Lett. B78 (1978) 150.
- [8] J. I. Kapusta, "Quantum chromodynamics at high temperature," Nucl. Phys. B148 (1979) 461-498.
- [9] S. A. Chin, "Transition to hot quark matter in relativistic heavy ion collision," Phys. Lett. B78 (1978) 552-555.
- [10] U. W. Heinz, "The little bang: Searching for quark-gluon matter in relativistic heavy-ion collisions," Nucl. Phys. A685 (2001) 414-431.
- [11] Velký třesk: www.particleadventure.org/images/history_of_the_universe_2014.jpg [online 23/04/2016]
- [12] Tomášik, B., F. Sannino, I. Bearden a T. Dossing, "Topics in modern nuclear physics: Flow and Sizes", Kobenhavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.
- [13] E. Schnedermann, J. Sollfrank and U. Heinz, "Thermal phenomenology of hadrons from 200 A GeV S+S collisions," Phys. Rev. C48 (1993) 2462-2475.
- [14] Freeze-out: R. Stock. arXiv:0807.1610v1.

REFERENCE

- [15] W. Broniowski, A. Baran and W. Florkowski, "Thermal approach to rhic," Acta Phys. Polon. B33 (2002) 4235-4258.
- [16] Tomášik, B., F. Sannino, I. Bearden and T. Dossing, "Topics in modern nuclear physics: Observables addressed by hydrodynamics," Kobenhavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.
- [17] Modifikované Besselovy funkce: <http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page.376.htm>
- [18] K. Dusling, G. D. Moore and D. Teahey, "Radiative energy loss and $v_2(p_T)$ spectra for viscous hydrodynamics," Phys. Rev. C81(2010)
- [19] D. Teaney, "Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and Hanbury Brown-Twiss radii," Phys. Rev. C68(2003)
- [20] Pohybové rovnice QCD: https://wiki.bnl.gov/TECHQM/index.php/QCD_Equation_of_State [online 11/05/2016]
- [21] I. Melo and B. Tomášik, "Reconstructing the final state of Pb+Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$," J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 43 (2016)
- [22] J. Sollfrank, P. Koch and U. Heinz, "The influence of resonance decays on the p_T spectra from heavy-ion collisions," Phys. Lett. B (1990)
- [23] Boris Tomášik, "DRAGON: Monte Carlo generator of particle production from a fragmented fireball in ultrarelativistic nuclear collisions," Computer Physics Communications 180 (2009) 1642-1653