

**UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH**  
**PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA**

**KVANTOVÁ NELOKÁLNOSŤ A PREVIAZANIE V**  
**TRIMERIZOVANOM ISINGOVOM-HEISENBERGOVOM REŤAZCI**

**UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH**  
**PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA**

**KVANTOVÁ NELOKÁLNOSŤ A PREVIAZANIE V**  
**TRIMERIZOVANOM ISINGOVOM-HEISENBERGOVOM REŤAZCI**

**Študentská vedecká práca**

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Model</b>	<b>2</b>
2.1	Magnetizácia . . . . .	4
2.2	Korelačné funkcie . . . . .	5
2.3	Redukovaná matica hustoty . . . . .	6
2.4	Bellova nerovnosť a kvantové previazanie . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Výsledky</b>	<b>8</b>
3.1	Základný stav . . . . .	8
3.2	Nenulové teploty . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Záver</b>	<b>22</b>

# 1 Úvod

Einstein, Podolsky a Rosen v svojom článku z roku 1935 tvrdili, že vlnová funkcia nepopisuje celú fyzikálnu realitu keďže dochádza k narušeniu lokálneho realizmu [1]. Verili však, že teória, ktorá by popisovala celú fyzikálnu realitu je možná. Takouto teóriou mohla napríklad byť teória skrytých parametrov. Bell ale odvodením Bellových nerovností teoreticky ukázal, že žiadna teória skrytých parametrov nie je možná [2]. Bellove nerovnosti zároveň začali byť nástrojom pre experimentátorov na overovanie teórií skrytých parametrov.

Jedným z ďalších dôsledkov Einsteinovej, Podolskeho a Rosenovej práce bolo objavenie ďalšej črty správania sa nášho sveta - objavenie kvantového previazania. Kvantové previazanie vzniká, keď sa viaceré častice naraz nedajú popísať jednotlivými vlnovými funkciami, ale iba jedinou spoločnou vlnovou funkciou popisujúcou ich správanie. V dôsledku tohoto popisu častíc dokážeme v momente vykonania merania len na jednej z nich, získať informáciu aj o stave ostatných kvantovo previazaných časticách. Aj kvantová nelokálnosť, ktorá narušuje princíp lokality, je jedným z dôsledkov kvantového previazania.

Kvantové javy môžu mať viacero nezvyčajných makroskopických prejavov ako je napríklad vznik prechodných platô v magnetizačných krivkách kvantových spinových systémoch. Magnetizačné platô môže vzniknúť v Heisenbergových reťazcoch len vtedy, ak magnetizácia spĺňa podmienku nájdenú Oshikawom, Yamanakom a Affleckom [3]:  $p(S_u - m) = \mathbb{Z}$ , kde  $p$  je perióda základného stavu,  $S_u$  je celkový spin elementárnej bunky,  $m$  je celková magnetizácia elementárnej bunky a  $\mathbb{Z}$  je celé číslo. Táto podmienka je však len nutnou a nie postačujúcou podmienkou a preto je dôležité existenciu magnetizačných platô overiť priamym výpočtom.

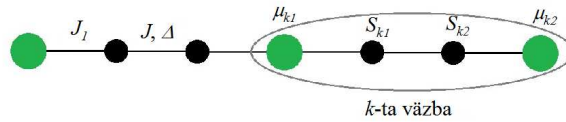
V našej práci sa budeme zaoberať Isingovým-Heisenbergovým reťazcom so spinom  $\frac{1}{2}$ , pre ktorý už existencia magnetizačných platô bola preskúmaná [4]. Preto sa zameriame najmä na kvantifikovanie kvantovej nelokálnosti a kvantového a termálneho previazania a vplyvu magnetizačných platô na ich veľkosť.

## 2 Model

Budeme študovať Isingov-Heisenbergov reťazec so spinom  $\frac{1}{2}$  za prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa. Naš reťazec je schematicky znázornený na obr. 1. Hamiltonián daného reťazca je možné zapísať nasledovne:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\langle i,j \rangle} J \left[ \Delta \left( \hat{S}_i^x \hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_j^y \right) + \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right] + \sum_{\langle k,l \rangle} J_1 \hat{S}_k^z \hat{\mu}_l^z - \sum_l H_A \hat{\mu}_l^z - \sum_k H_B \hat{S}_k^z, \quad (1)$$

kde  $\hat{S}^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) sú štandardné priestorové zložky spinového operátora veľkosti  $\frac{1}{2}$ . Interakčný parameter  $J$  označuje heisenbergovskú interakciu medzi susediacimi Heisenbergovými spinmi reťazca a prvá sumácia v hamiltoniáne prechádza cez všetky dvojice susedných Heisenbergových spinov. Parameter  $J_1$  označuje isingovskú interakciu medzi susediacimi Isingovými ( $\hat{\mu}_l^z$ ) a Heisenbergovými ( $\hat{S}_k^z$ ) spinmi a druhá sumácia preto prechádza cez dvojice susediacich Isingových a Heisenbergových spinov.  $\Delta$  je anizotropný parameter, ktorý udáva mieru XXZ anizotropie.  $H_A$  a  $H_B$  sú vonkajšie magnetické polia pôsobiace na Isingove, respektíve Heisenbergove spiny, pričom sumácie zahrňujúce  $H_A$  a  $H_B$  započítavajú väzby medzi jednotlivými poliami a spinmi, na ktoré pôsobia. Pre ďalší postup je užitočné si prepísať hamiltonián ako



Obr. 1: Na obrázku je znázornená magnetická štruktúra Isingovo-Heisenbergovho reťazca. Zelenými väčšími krúžkami sú zobrazené mriežkové pozície Isingových spinov a čiernymi menšími krúžkami sú zobrazené mriežkové pozície Heisenbergových spinov. Na obrázku sú tiež vyznačené jednotlivé interakcie medzi spinmi,  $J$  označuje Heisenbergovu interakciu a  $J_1$  Isingovu interakciu, pričom  $\Delta$  je anizotropný parameter.

súčet jednotlivých väzbových hamiltoniánov:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^N \hat{\mathcal{H}}_k. \quad (2)$$

$N$  je počet Isingových spinov a teda naša sumácia prechádza cez všetky väzby pôvodného, nedekorovaného reťazca. Vo väzbovom hamiltoniáne  $\hat{\mathcal{H}}_k$  sú zahrnuté všetky interakčné členy

spojené s  $k$ -tou väzbou ako je znázornené na obr. 1:

$$\hat{\mathcal{H}}_k = J \left[ \Delta \left( \hat{S}_{k1}^x \hat{S}_{k2}^x + \hat{S}_{k1}^y \hat{S}_{k2}^y \right) + \hat{S}_{k1}^z \hat{S}_{k2}^z \right] + h_1 \hat{S}_{k1}^z + h_2 \hat{S}_{k2}^z - \frac{H_A}{2} (\mu_{k1}^z + \mu_{k2}^z), \quad (3)$$

kde  $h_1 = J_1 \mu_{k1}^z - H_B$  a  $h_2 = J_1 \mu_{k2}^z - H_B$ .

Partičná funkcia nášho systému sa dá pomocou väzbového hamiltoniánu čiastočne faktorizovať:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}_\mu \prod_{k=1}^N \text{Tr}_{S_{k1}} \text{Tr}_{S_{k2}} \exp(-\beta \hat{\mathcal{H}}_k), \quad (4)$$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$  je inverzná teplota,  $k_B$  je Boltzmannova konštanta a  $T$  je absolútna teplota.  $\text{Tr}_\mu$  označuje stopu cez stupne voľnosti Isingových spinov a  $\text{Tr}_{S_{k1}} \text{Tr}_{S_{k2}}$  stopu cez stupne voľnosti Heisenbergových spinov. Náš model môžeme premapovať pomocou dekoračno-iteračnej transformácie [5] na nedekorovaný Isingov spinový reťazec nasledujúcim spôsobom:

$$\text{Tr}_{S_{k1}} \text{Tr}_{S_{k2}} \exp(-\beta \hat{\mathcal{H}}_k) = A \exp[\beta R \mu_{k1}^z \mu_{k2}^z + \beta H (\mu_{k1}^z + \mu_{k2}^z)], \quad (5)$$

kde  $A$ ,  $R$  a  $H$  sú transformačné parametre. Následne spočítame stopu cez dvojicu Heisenbergových spinov a získame rovnicu:

$$\text{Tr}_{S_{k1}} \text{Tr}_{S_{k2}} \exp(-\beta \hat{\mathcal{H}}_k) = \sum_{i=1}^4 \exp(-\beta \lambda_i), \quad (6)$$

kde  $\lambda_i$  sú vlastné hodnoty väzbového hamiltoniánu. Do danej rovnice dosadíme dané vlastné hodnoty a použijeme dekoračno-iteračnú transformáciu (5). Po zohľadnení zostávajúcich stupňov voľnosti Isingových spinov získame tri rovnice pre tri transformačné parametre. Ich vyriešením nájdeme explicitné tvary transformačných parametrov:

$$H = H_A + \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right), \quad (7)$$

$$R = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{V_1 V_2}{V_3^2} \right), \quad (8)$$

$$A = 2 \exp\left(\frac{\beta J}{4}\right) \sqrt{V_1 V_2 V_3^2}, \quad (9)$$

kde:

$$V_1 = \cosh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 - 2H_B) \right] + \exp \left( \frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta}{2} J \Delta \right), \quad (10)$$

$$V_2 = \cosh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 - 2H_B) \right] + \exp \left( \frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta}{2} J \Delta \right), \quad (11)$$

$$V_3 = \cosh(\beta H_B) + \exp \left( \frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left( \frac{\beta}{2} \sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2} \right). \quad (12)$$

Partičnú funkciu si teraz prepíšeme do nového tvaru využitím rovnice (5) a rovníc (7) - (9):

$$\mathcal{Z} = A^N \text{Tr}_{\{\mu\}} \exp \left( \beta R \sum_{k=1}^N \mu_k \mu_{k+1} + \beta H \sum_{k=1}^N \mu_k \right) = A^N \mathcal{Z}_0(R, H), \quad (13)$$

kde  $\mathcal{Z}_0$  je partičnou funkciou Isingovho spinového reťazca s efektívnou interakciou  $R$  a efektívnym vonkajším poľom  $H$ . Isingov spinový reťazec je následne presne riešiteľný pomocou metódy matice prechodu [6].

Ďalším dôležitým krokom je následný výpočet Gibbsovej voľnej energie, ktorú ďalej využijeme na výpočet magnetizácie. Gibbsova voľná energia je explicitne daná predpisom:

$$G = -\frac{NR}{4} - Nk_B T \ln \left\{ A \left[ \cosh \left( \frac{\beta H}{2} \right) + \sqrt{\sinh^2 \left( \frac{\beta H}{2} \right) + \exp(-\beta R)} \right] \right\}. \quad (14)$$

## 2.1 Magnetizácia

Jedným zo spôsobov ako získať predpisy pre magnetizáciu je derivácia Gibbsovej voľnej energie podľa vonkajšieho magnetického poľa. Ak zderivujeme rovnicu (14) podľa magnetického poľa naloženého na Isingových spinoch, dostaneme magnetizáciu Isingových spinov:

$$M_A = -\frac{\partial G}{\partial H_A} = N m_0, \quad (15)$$

kde  $m_0$  označuje redukovanú magnetizáciu:

$$m_0 = \frac{1}{2} \frac{\sinh \left( \frac{\beta H}{2} \right)}{\sqrt{\sinh^2 \left( \frac{\beta H}{2} \right) + \exp(-\beta R)}}. \quad (16)$$

Derivovaním rovnice (14) podľa magnetického poľa pôsobiaceho na Heisenbergove spiny, získame magnetizáciu Heisenbergových spinov:

$$M_B = -\frac{\partial G}{\partial H_B} = \frac{N}{2} (K_1 - K_2 + 2K_3) - 2N m_0 (K_1 + K_2) + \frac{N}{2} \varrho_0 (K_1 - K_2 - 2K_3), \quad (17)$$

kde  $\varrho_0$  označuje párovú korelačnú funkciu korešpondujúceho nedekorovaného Isingovho modelu:

$$\varrho_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{\exp(-\beta R)}{\exp(-\beta R) + \sinh^2 \left( \frac{\beta H}{2} \right) + \cosh \left( \frac{\beta H}{2} \right) \sqrt{\exp(-\beta R) + \sinh^2 \left( \frac{\beta H}{2} \right)}}. \quad (18)$$

Koeficienty  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  sú vyjadrené nasledujúcimi vzťahmi:

$$K_1 = \frac{\sinh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 - 2H_B) \right]}{\cosh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 - 2H_B) \right] + \exp \left( \frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left[ \frac{\beta J \Delta}{2} \right]}, \quad (19)$$

$$K_2 = \frac{\sinh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 + 2H_B) \right]}{\cosh \left[ \frac{\beta}{2} (J_1 + 2H_B) \right] + \exp \left( \frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left[ \frac{\beta J \Delta}{2} \right]}, \quad (20)$$

$$K_3 = \frac{\sinh(\beta H_B)}{\cosh(\beta H_B) + \exp \left( -\frac{\beta J}{2} \right) \cosh \left[ \frac{\beta}{2} \sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2} \right]}. \quad (21)$$

## 2.2 Korelačné funkcie

Na výpočet korelačných funkcií medzi dvojicami susediacich Heisenbergových spinov využijeme vzťah:

$$C^{xx} = \left\langle \hat{S}_{k_1}^x \hat{S}_{k_2}^x \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[ \hat{S}_{k_1}^x \hat{S}_{k_2}^x \exp(-\beta \mathcal{H}) \right] \quad (22)$$

Deriváciou logaritmu partičnej funkcie podľa súčiny Heisenbergovej interakcie a anizotropného parametra  $J\Delta$  získame výraz, ktorý je okrem multiplikatívnej konštanty zhodný s párovou korelačnou funkciou definovanou vzťahom (22):

$$C^{xx} = \frac{1}{2N} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial J \Delta}. \quad (23)$$

Obdobný postup použijeme aj pri výpočte  $z$ -ovej zložky párovej korelačnej funkcie medzi dvojicami susediacich Heisenbergových spinov. Tentoraz však budeme derivovať iba podľa Heisenbergovej interakcie  $J$ :

$$C^{zz} = \frac{1}{N} \frac{\partial \ln(\mathcal{Z})}{\partial J}. \quad (24)$$

Po vypočítaní daných derivácií získame finálne predpisy pre korelačné funkcie:

$$C^{xx} = -\frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} (K_1^J + K_2^J) + K_3^J \right] - \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{1}{2} (K_1^J + K_2^J) - K_3^J \right] - \frac{m_0}{4} (K_1^J - K_2^J), \quad (25)$$

$$C^{zz} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} (K_1^{J\Delta} + K_2^{J\Delta}) + K_3^{J\Delta} \right] + \rho_0 \left[ \frac{1}{2} (K_1^{J\Delta} + K_2^{J\Delta}) - K_3^{J\Delta} \right] + \frac{m_0}{2} (K_1^{J\Delta} - K_2^{J\Delta}). \quad (26)$$

Výrazy  $K_i^J$  a  $K_i^{J\Delta}$  sme si označili nasledovne:

$$K_i^J = \frac{2}{\beta V_i} \frac{\partial V_i}{\partial J}, \quad K_i^{J\Delta} = \frac{2}{\beta V_i} \frac{\partial V_i}{\partial J \Delta}, \quad (27)$$



kde  $i = 1, 2, 3$  a jednotlivé derivácie majú tvar:

$$\frac{\partial V_1}{\partial J} = \frac{\partial V_2}{\partial J} = \frac{\beta}{2} \exp\left(\frac{\beta J}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta J \Delta}{2}\right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial J} = \frac{\beta}{2} \exp\left(\frac{\beta J}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2}\right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial J \Delta} = \frac{\partial V_2}{\partial J \Delta} = \frac{\beta}{2} \exp\left(\frac{\beta J}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta J \Delta}{2}\right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial J \Delta} = \frac{\beta}{2} \exp\left(\frac{\beta J}{2}\right) \frac{J \Delta}{\sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2}} \sinh\left[\frac{\beta}{2} \sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2}\right]. \quad (31)$$

### 2.3 Redukovaná matica hustoty

Pri odvodení redukovanej matice hustoty pre Hilbertov podpriestor dvoch Heisenbergových spinov sme danú maticu najprv rozložili pomocou úplného Taylorovho rozvoja. Následne sme využili definíciu stredných hodnôt na nájdenie jednotlivých rozvojových koeficientov. Výsledný tvar našej redukovanej matice hustoty pre  $i$ -ty a  $j$ -ty spin je:

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + m + C^{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} + m_s - C^{zz} & 2C^{xx} & 0 \\ 0 & 2C^{xx} & \frac{1}{4} - m_s - C^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} - m + C^{zz} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

kde  $m$  je magnetizácia,  $m_s$  je staggered magnetizácia systému a  $C^{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ) sú priestorové zložky párovej korelačnej funkcie medzi susednými Heisenbergovými spinmi.

### 2.4 Bellova nerovnosť a kvantové previazanie

Na nájdenie analytického predpisu pre Bellovu nerovnosť využijeme predpis odvodený Horodeckim *et al.* [7], ktorý vychádza z CHSH nerovnosti [8] nájdenej Clauserom, Horneom, Shimonym a Holtom, ktorá je len upravenou verziou Bellovej nerovnosti. Horodeckého predpis má nasledujúci tvar:

$$\mathcal{B} = 2\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} \leq 2, \quad (33)$$

kde  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  sú dve najväčšie vlastné hodnoty matice  $\mathcal{L}^T \mathcal{L}$ . Matica  $\mathcal{L}^T$  je transponovaná matica k matici  $\mathcal{L}$ , ktorá je definovaná vzťahom:

$$\mathcal{L}_{ij} = \text{Tr}[\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)], \quad (34)$$

pre  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\rho$  je redukovaná matica hustoty dvojice Heisenbergových spinov a  $\hat{\sigma}_i$  sú Pauliho matice. Po výpočte matice  $\mathcal{L}^T \mathcal{L}$  a nájdení jej vlastných hodnôt získame predpis pre výpočet Bellovej funkcie:

$$\mathcal{B} = \max \left\{ 8\sqrt{2(C^{xx})^2}, 8\sqrt{(C^{xx})^2 + (C^{zz})^2} \right\}. \quad (35)$$

Ak je Bellova nerovnosť narušená, systém je kvantovo nelokálny.

Pri výpočte concurrence ako miery kvantového previazania sme najprv vypočítali maticu  $\rho\tilde{\rho}$  [9]. Matica  $\tilde{\rho}$  je definovaná nasledovne:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \hat{\otimes} \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \hat{\otimes} \sigma_y), \quad (36)$$

kde  $\sigma_y$  je Pauliho matica a  $\rho^*$  je komplexne združená matica  $\rho$ . Následne sme zistili vlastné hodnoty matice  $\rho\tilde{\rho}$ , aby sme ich na koniec odmocnili a mohli vypočítať concurrence zo vzťahu:

$$\mathcal{C} = \max \left\{ 0, \lambda_{max} - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \right\}, \quad (37)$$

kde  $\lambda_{max}$  je najväčšia vlastná hodnota danej matice a  $\lambda_1, \lambda_2$  a  $\lambda_3$  sú zvyšné vlastné hodnoty. Po výpočte vlastných hodnôt matice  $\rho\tilde{\rho}$  dostávame predpis pre concurrence:

$$\mathcal{C} = \max \left\{ 0, 4|C^{xx}| - 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + C^{zz}\right)^2 - m^2} \right\}. \quad (38)$$

Ak je concurrence väčšia ako 0, potom je systém kvantovo previazaný.

### 3 Výsledky

V tejto časti práce budeme prezentovať najzaujímavejšie výsledky, ktoré sme získali. Najskôr znázorníme fázový diagram základného stavu, potom preskúmame magnetizáciu, kvantovú ne- lokálnosť pomocou Bellovej nerovnosti a kvantové previazanie pomocou concurrence pre nulové ako aj nenulové teploty. Venovať sa budeme iba Isingovmu-Heisenbergovmu reťazcu s atiferomagnetickými interakciami  $J > 0$  a  $J_1 > 0$ , u ktorého možno očakávať najzreteľnejšie kvantové prejavy.

#### 3.1 Základný stav

Pre nájdenie základného stavu sme si najprv väzbový hamiltonián (3) prepísali do maticového tvaru a našli sme jeho vlastné hodnoty, čiže energie. Porovnaním vlastných hodnôt sme získali krivky fázových prechodov základného stavu, ktoré sú zobrazené na obr. 2. Krivky označené číslami na danom obrázku majú nasledovné vyjadrenia:

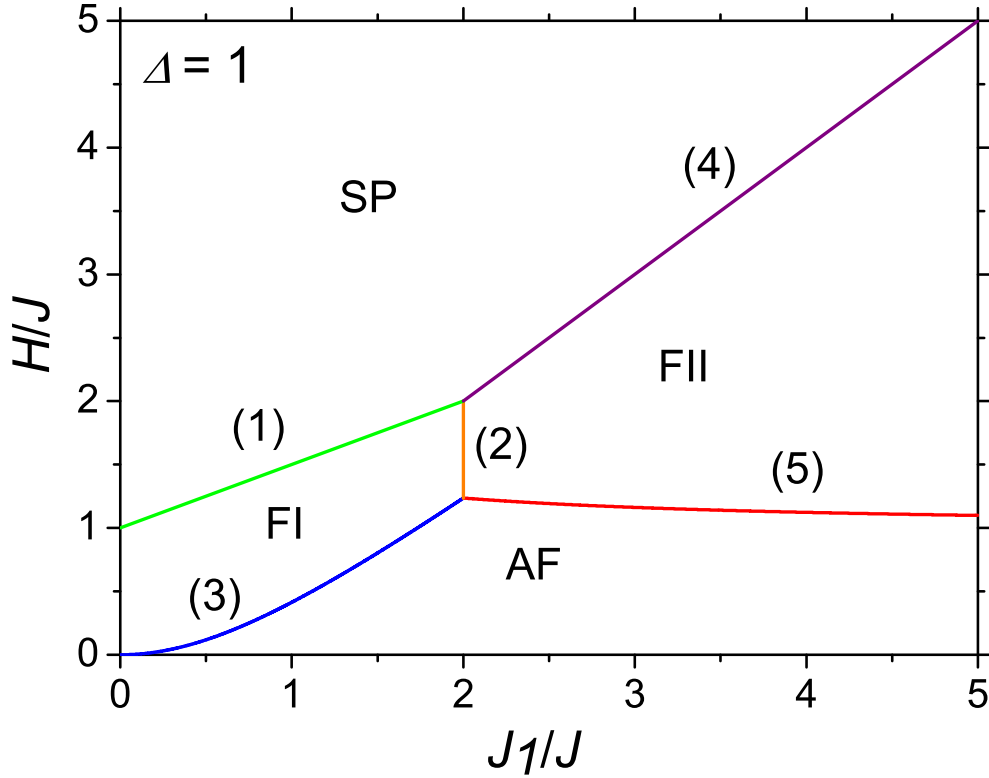
$$\begin{aligned}
 (1) : \frac{H}{J} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{J_1}{J} \\
 (2) : \frac{J_1}{J} &= 2 \\
 (3) : \frac{H}{J} &= \sqrt{\frac{J_1^2}{J^2} + 1} - 1 \\
 (4) : \frac{H}{J} &= \frac{J_1}{J} \\
 (5) : \frac{H}{J} &= \sqrt{\frac{J_1^2}{J^2} + 1} - \frac{J_1}{J} + 1.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Vlnové funkcie charakterizujúce jednotlivé fázy sú vlastnými funkciami hamiltoniánu a teda po nenáročných výpočtoch sme získali ich analytické vyjadrenie. Vlnovú funkciu pre ferimagnetickú fázu I môžeme vyjadriť:

$$|FI\rangle = \prod_{k=1}^N |\uparrow\rangle_{\mu_k} \otimes \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)_k, \tag{40}$$

pre antiferomagnetickú fázu:

$$|AF\rangle = \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} |\uparrow\rangle_{\mu_{2k-1}} \otimes \sqrt{\frac{1}{2}} (a_- |\uparrow\downarrow\rangle - a_+ |\downarrow\uparrow\rangle)_{\mu_{2k-1}} |\downarrow\rangle_{\mu_{2k}} \otimes \sqrt{\frac{1}{2}} (a_+ |\uparrow\downarrow\rangle - a_- |\downarrow\uparrow\rangle)_{\mu_{2k}}, \tag{41}$$



Obr. 2: Na obrázku je znázornený fázový diagram základného stavu v rovine  $\frac{J_1}{J} - \frac{H}{J}$  pre anizotropný člen  $\Delta = 1$ , ktorý obsahuje 4 fázy: ferimagnetickú fázu FI, antiferomagnetickú fázu AF, ferimagnetickú fázu FII a saturovanú paramagnetickú fázu SP.

kde:

$$a_+ = \sqrt{\left[1 + \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2 + J^2\Delta^2}}\right]}, a_- = \sqrt{\left[1 - \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2 + J^2\Delta^2}}\right]}. \quad (42)$$

Vlnovú funkciu pre ferimagnetickú fázu II môžeme vyjadriť:

$$|FII\rangle = \prod_{k=1}^N |\downarrow\rangle_{\mu_k} |\uparrow\uparrow\rangle_k, ; \quad (43)$$

a nakoniec pre saturovanú paramagnetickú fázu:

$$|SP\rangle = \prod_{k=1}^N |\uparrow\rangle_{\mu_k} |\uparrow\uparrow\rangle. \quad (44)$$

Teraz sa bližšie pozrieme na jednotlivé fázy. Náš model je XXZ Isingovým-Heisenbergovým modelom - korelačné funkcie  $x$ -ovej a  $y$ -ovej zložky spinu sa budú vždy rovnať. Z rovnice (40)

vidíme, že ferimagnetická fáza FI obsahuje Heisenbergove dvojice nachádzajúce sa v stave singletného diméru. Uniformná  $m_B^z$  a staggered  $m_B^s$  magnetizácia Heisenbergových spinov v danom stave sú nulové:

$$m_B^s = m_B^z = 0. \quad (45)$$

V stave singletného diméru je systém maximálne antikorelovaný a teda párové korelačné funkcie Heisenbergových spinov nadobúdajú maximálne záporné hodnoty:

$$C^{xx} = C^{zz} = -\frac{1}{4}. \quad (46)$$

Stav singletného diméru je aj Bellovým stavom a z rovnice (35) môžeme rovno vidieť, že kvantová nelokálnosť systému bude maximálna, čo implikuje aj maximálne kvantové previazanie systému:

$$\mathcal{B} = 2\sqrt{2}, \quad \mathcal{C} = 1, \quad (47)$$

kde  $\mathcal{B}$  označuje Bellovu funkciu a  $\mathcal{C}$  označuje Concurrence. Prejdime teraz k antiferomagnetickému stavu AF. Z rovnice (41) vidíme, že tento stav už neobsahuje Heisenbergove dvojice spinov v stave singletného diméru, ale pre limitný prípad nulovej Isingovej interakcie  $J$  sa naň redukuje. Jeho staggered magnetizácia Heisenbergových spinov preto už nie je nulová, zatiaľ čo uniformná magnetizácia je nulová:

$$m_B^s = -\frac{1}{2} \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2 + J^2 \Delta^2}}, \quad m_B^z = 0. \quad (48)$$

Párová korelačná funkcia medzi  $x$ -ovými zložkami Heisenbergových spinov už taktiež nenadobúda extrémálne hodnoty, na rozdiel od párovej korelačnej funkcie medzi  $z$ -ovými zložkami:

$$C^{xx} = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{J_1^2}{J_1^2 + J^2 \Delta^2}}, \quad C^{zz} = -\frac{1}{4}. \quad (49)$$

Amplitúdy pravdepodobnosti jednotlivých spinových konfigurácií  $|\uparrow\downarrow\rangle$  a  $|\downarrow\uparrow\rangle$  sa nerovnajú, ako pri stave singletného diméru (41), čo znižuje vzájomné namiešania daných spinových konfigurácií. Preto sú hodnoty Bellovej funkcie a concurrence menšie ako v predchádzajúcom prípade ferimagnetickej fázy I:

$$\mathcal{B} = 2\sqrt{2 - \frac{J_1^2}{J_1^2 + J^2 \Delta^2}}, \quad \mathcal{C} = \sqrt{1 - \frac{J_1^2}{J_1^2 + J^2 \Delta^2}}. \quad (50)$$

Vidíme, že k narušeniu Bellovej nerovnosti a ku kvantovému previazaniu dochádza vždy okrem limitného prípadu nulovou hodnotou Heisenbergovej interakcie  $J = 0$ . Medzi saturovanou paramagnetickou a ferimagnetickou fázou II nie je rozdiel v usporiadaní Heisenbergových spinov, ale len v usporiadaní Isingových spinov. Všetky fyzikálne veličiny uvedené nižšie opisujú iba vlastnosti systému v Heisenbergovom podpriestore, preto majú pre obidva spomenuté stavy rovnaké hodnoty. Z vlnových funkcií (43) a (44) vidíme, že tieto fázy neobsahujú kvantovú superpozíciu spinových stavov Heisenbergových dimérov a preto sú klasickými stavmi. Uniformná magnetizácia je maximálna a staggered je nulová, pretože Heisenbergove spiny sú natočené vždy do rovnakého smeru:

$$m_B^s = 0, \quad m_B^z = \frac{1}{2}. \quad (51)$$

$x$ -ové zložky susedných Heisenbergových spinov sú v takejto fáze nekorelované a  $z$ -ová korelačná funkcia je maximálne korelovaná kvôli natočeniu Heisenbergových spinov pozdĺž  $z$ -ovej osi:

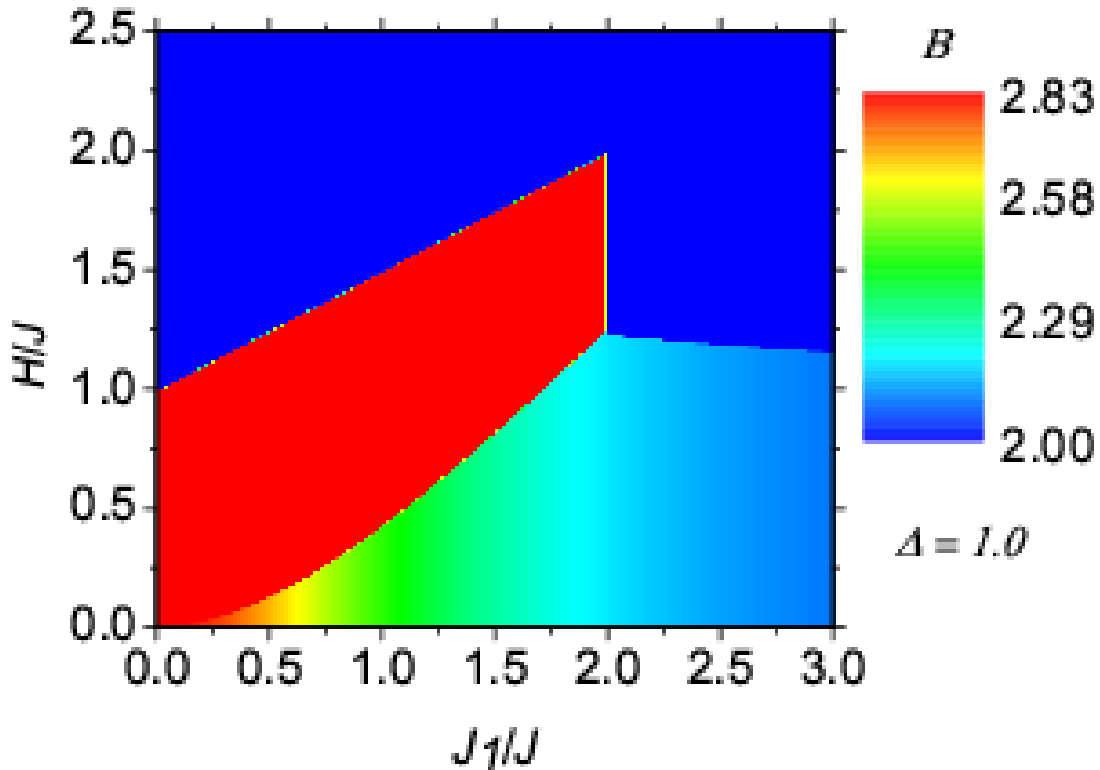
$$C^{xx} = 0, \quad C^{zz} = \frac{1}{4}. \quad (52)$$

Tieto fázy sú klasické, nedochádza teda k žiadnemu narušeniu kvantovej lokálnosti ani ku kvantovému previazaniu:

$$\mathcal{B} = 2, \quad \mathcal{C} = 0. \quad (53)$$

Bellova funkcia nadobúda najvyššiu možnú hodnotu, pri ktorej ešte nie je systém kvantovo nelokálny.

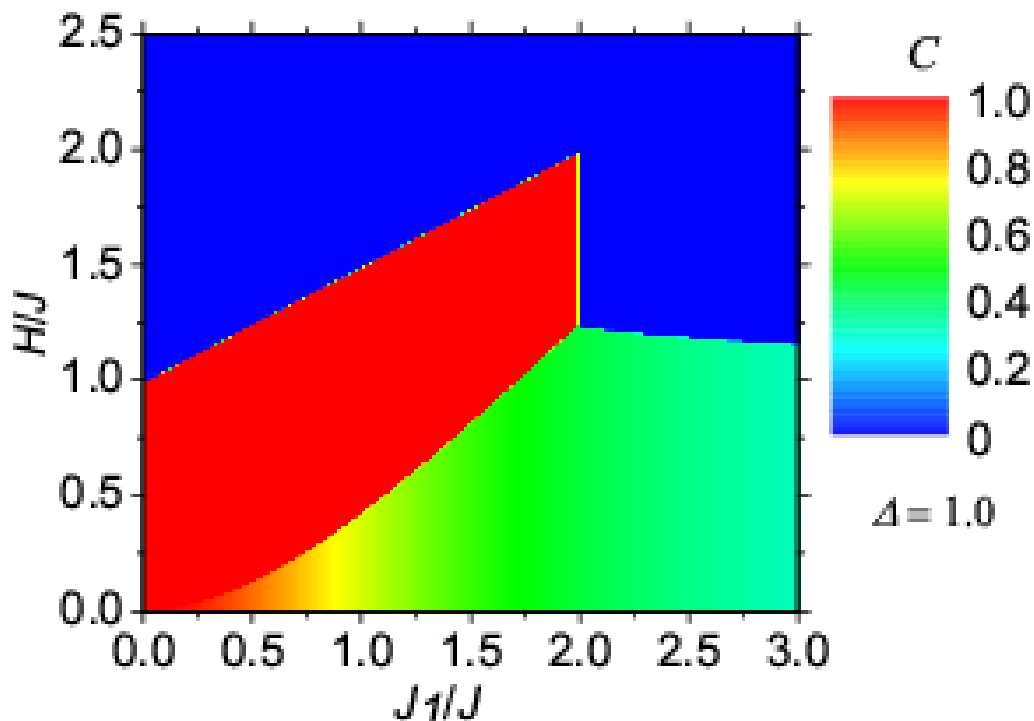
Na obr. 3 môžeme vidieť závislosť Bellovej funkcie od zmeny vonkajšieho poľa a Isingovej interakcie. Systém narušuje Bellovu nerovnosť v kvantových stavoch - antiferomagnetickom AF a ferimagnetickom FI. V klasických stavoch je lokálny a dosahuje hodnotu  $\mathcal{B} = 2$ , teda maximálnu hodnotu, kedy je ešte charakter systému lokálny. V antiferomagnetickej fáze dochádza s rastom Isingovej interakcie k poklesu nelokálnosti - v limitnom prípade nekonečne veľkej Isingovej interakcie, nelokálnosť zaniká - čo môžeme vidieť aj z rovnice (50). Ferimagnetická fáza FI je maximálne nelokálna na celej svojej parametrickej oblasti, čo je vidno aj z rovnice (47). Veľkosť vonkajšieho magnetického poľa na hodnotu Bellovej funkcie v základnom stave



Obr. 3: Na obrázku je znázornená Bellova funkcia pri teplote absolútnej nuly a anizotropnom člene  $\Delta = 1$  ako funkcia vonkajšieho poľa a normovaného na parameter  $J$  a Isingovej interakcie  $J_1$  normovanej na parameter  $J$ .

nijako nevlýva, čo je zjavné aj z predpisov pre výpočet Bellovej funkcie v jednotlivých fázach (47), (50) a (53). Môžeme si tiež všimnúť, že prudké zmeny v hodnotách Bellovej funkcie dobre kopírujú zmeny fáz v základnom stave znázornené na obr. 2 s výnimkou prechodu medzi saturovanou paramagnetickou SP a ferimagnetickou fázou FII. Je to spôsobené rovnakou vlnovou funkciou popisujúcou tieto dva stavy v podpriestore 2 susedných Heisenbergových spinov nášho systému, vid' (44) a (43), keďže Bellova funkcia je počítaná práve pre 2 susedné Heisenbergove spiny.

Na obr. 4 je znázornená Concurrence v závislosti od relatívnej veľkosti vonkajšieho magnetického poľa a Isingovej interakcie. V základnom stave je vo veľkej zhode s Bellovou funkciou zobrazenou na obr. 3 a všetko, čo platilo pre Bellovu funkciu, platí aj pre concurrence. Jediný rozdiel je v antiferomagnetickvej fáze, kedy kvantové previazanie zaniká pomalšie ako kvantová nelokálnosť. Aj tu však platí, že s rastúcou silou Isingovej interakcie, kvantové previazanie



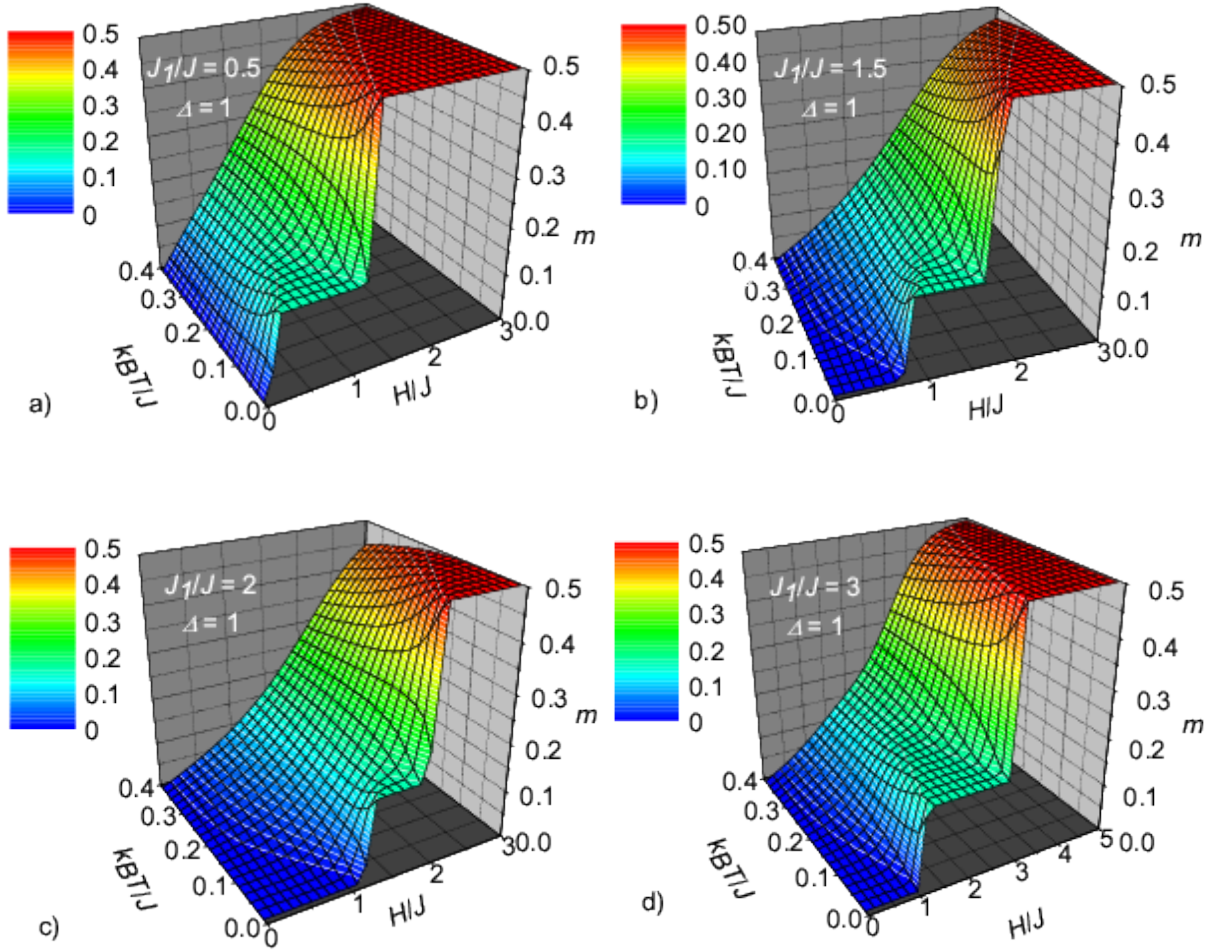
Obr. 4: Na obrázku je znázornená Concurrence pri teplote absolútnej nuly a anizotropnom člene  $\Delta = 1$  ako funkcia vonkajšieho poľa a normovaného na parameter  $J$  a Isingovej interakcie  $J_1$  normovanej na parameter  $J$ .

postupne zaniká.

### 3.2 Nenulové teploty

Pri nenulových teplotách začneme analýzou magnetizácie zobrazenej na obr. 5 a) - d). Na prvom obrázku 5 a) je znázornená magnetizácia systému pre hodnoty parametrov  $\frac{J_1}{J} = 0.5$  a  $\Delta = 1$  ako funkcia teploty a magnetizácie. Pri nulovej teplote nachádzame  $\frac{1}{3}$ -nové plató, kedy sa systém nachádza vo ferimagnetickej fáze I. Saturované plató nachádzame, keď systém prejde do saturovanej paramagnetickej fázy. Na obr. 5 b) je zobrazená magnetizácia pre  $\frac{J_1}{J} = 1.5$  a  $\Delta = 1$ . V nulovom vonkajšom poli je aj magnetizácia systému nulová, pričom magnetizačné plató s nulovou magnetizáciou pretrvá až kým nenastane prechod z antiferomagnetickej AF do ferimagnetickej fázy FI. Ferimagnetická fáza FI odpovedá vzniku  $\frac{1}{3}$ -magnetizačného plató, ktoré je stabilné až po dosiahnutie saturačného poľa. Saturačným poľom dochádza k energetickej stabilizácii saturovanej paramagnetickej fázy SP. Na obr. 5 c) je znázornená magnetizácia



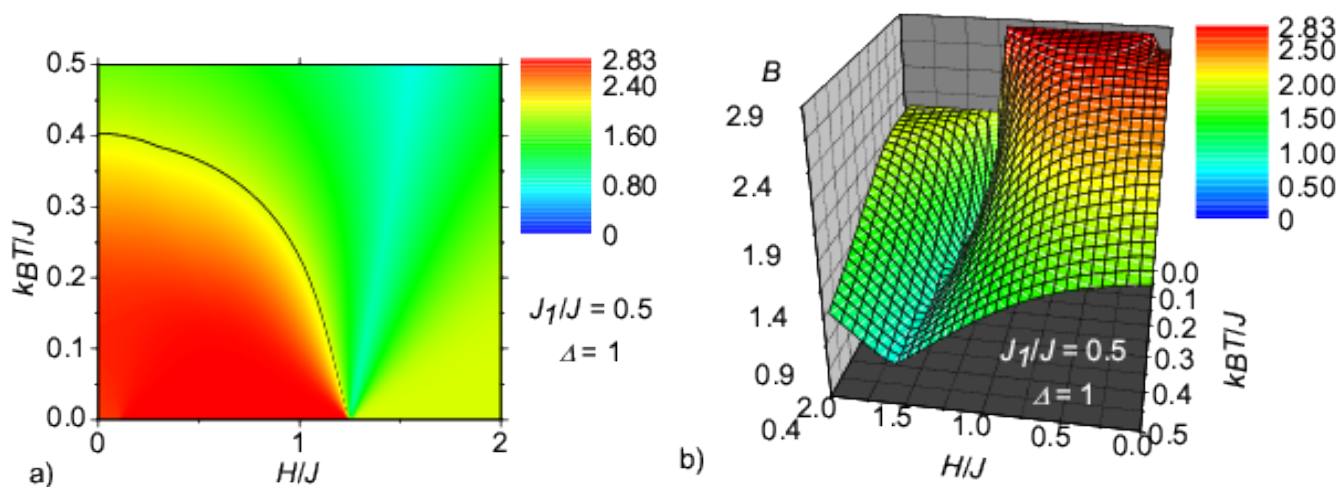


Obr. 5: Magnetizácia ako funkcia teploty a vonkajšieho magnetického poľa a normovaných na veľkosť Heisenbergovej interakcie  $J$  pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a rôzne hodnoty pomeru Isingovej a Heisenbergovej interakcie: a)  $\frac{J_1}{J} = 0.5$ ; b)  $\frac{J_1}{J} = 1.5$ ; c)  $\frac{J_1}{J} = 2$ ; d)  $\frac{J_1}{J} = 3$ .

ako funkcia magnetického poľa a teploty pre  $\frac{J_1}{J} = 2$  a  $\Delta = 1$ . Opäť je magnetizácia pri nulovej teplote pre malé hodnoty vonkajšieho magnetického poľa a nulová až kým nedôjde k prechodu z antiferomagnetickkej fázy AF. Pre daný pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie sa dostávame z antiferomagnetickkej fázy AF na fázové rozhranie medzi ferimagnetickými fázami FI a FII, v rámci ktorého vzniká nové  $\frac{1}{3}$  plató pomerne rýchlo zanikajúce so zvyšujúcou teplotou. K saturácii magnetizácie dochádza v saturovanej paramagnetickej fáze. Na obr. 5 d) je na koniec zobrazená magnetizácia ako funkcia vonkajšieho poľa a teploty pre  $\frac{J_1}{J} = 3$  a  $\Delta = 1$ . Opäť vidíme nulové magnetizačné plató v antiferomagnetickkej fáze AF,  $\frac{1}{3}$  plató vznikajúce fázovým prechodom do ferimagnetickej fázy FII a novú saturáciu pri prechode do saturovanej paramagnetickej fázy. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že s rastúcou teplotou sa jednotlivé

magnetizačné plató znižujú až kým postupne nezaniknú v dôsledku rastúceho vplyvu teplotných excitácií.

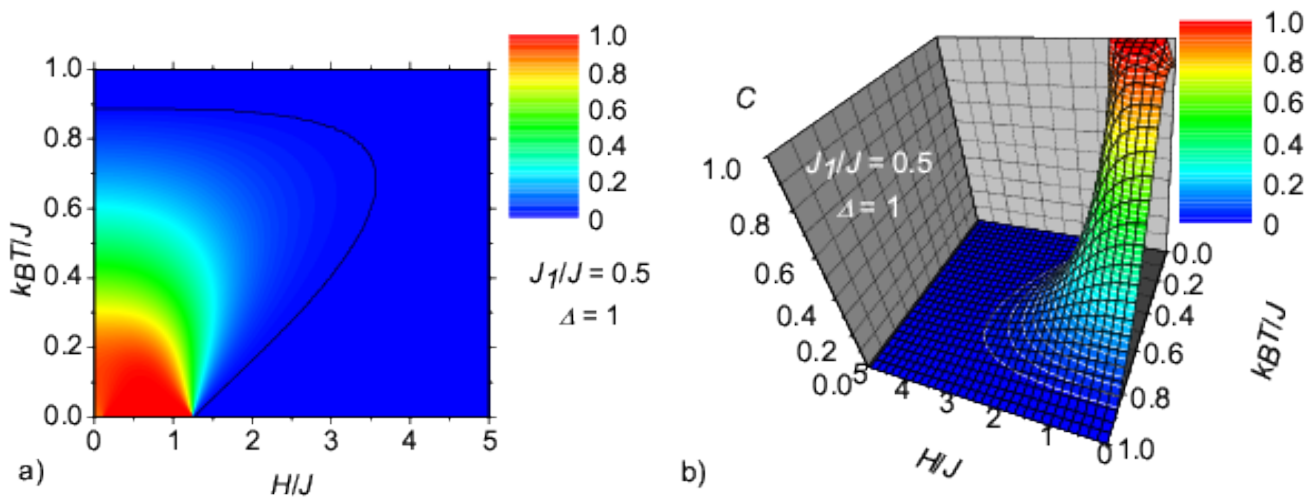
Teraz môžeme prejsť k analýze kvantovej nelokálnosti a kvantového previazania systému. Na obr. 6 je znázornená Bellova funkcia systému v závislosti od vonkajšieho magnetického poľa a teploty pre pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 0.5$  a anizotropný parameter  $\Delta = 1$ . Pri malej hodnote vonkajšieho magnetického poľa dochádza s jeho nárastom aj k miernemu nárastu Bellovej funkcie až po jej maximálnu hodnotu, vid' obr. 6 b), v dôsledku prechodu z antiferomagnetickkej fázy AF do ferimagnetickej fázy FI. Pri nulovej hodnote vonkajšieho magnetického poľa, taktiež dochádza k miernemu nárastu Bellovej funkcie v dôsledku teplotných excitácií do energeticky vyššieho (ale blízkeho) ferimagnetického stavu FI, ktorý má nelokálnejší charakter ako antiferomagnetická fáza AF. Pri hodnote  $\frac{H}{J} = 1.25$  pozorujeme pri nulovej teplote prechod z kvantovej ferimagnetickej fázy FI do klasickej saturovanej paramagnetickej fázy SP, v dôsledku ktorého dochádza k zániku kvantovej nelokálnosti. Krivka prahovej teploty prechodu z kvantovo nelokálneho charakteru do lokálneho je klesajúcou funkciou vonkajšieho magnetického poľa a preto zaniká v nulovej teplote pre už spomínanú kritickú hodnotu  $\frac{H}{J} = 1.25$ .



Obr. 6: Bellova funkcia pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 0.5$  v závislosti od teploty a vonkajšom magnetickom poli. Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu, pod ktorou je systém kvantovo nelokálny.

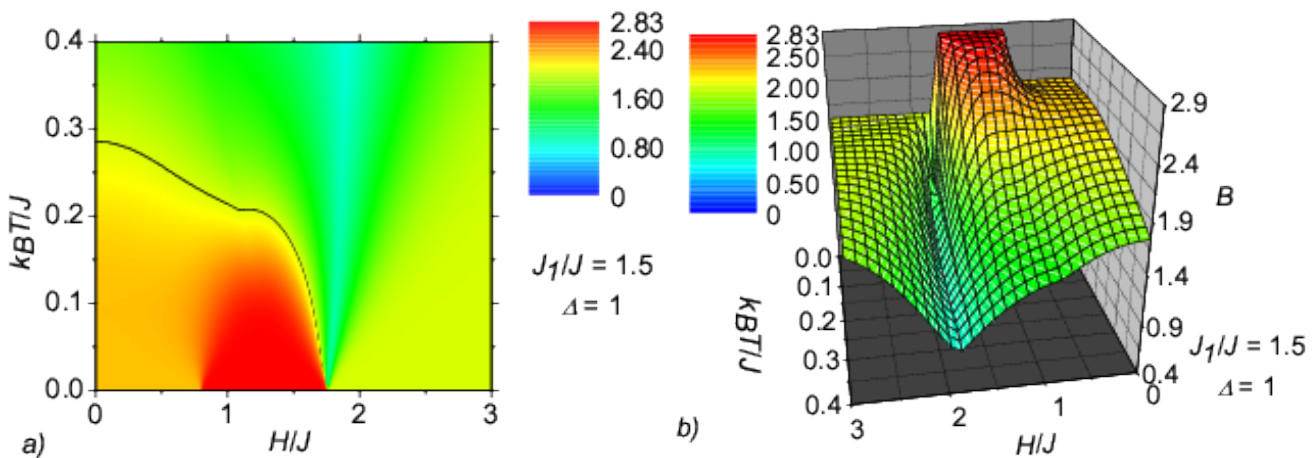
Na obr. 7 je znázornená concurrence v závislosti od vonkajšieho magnetického poľa a teploty pre pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 0.5$  a anizotropný parameter  $\Delta = 1$ .

Pri nulovej teplote a malom vonkajšom magnetickom poli sa hodnota concurrence opäť zvyšuje až po maximálnu hodnotu v dôsledku prechodu z antiferomagnetickkej fázy AF do ferimagnetickej fázy FI. Najväčšie kvantové previazanie systému odpovedá  $\frac{1}{3}$ -magnetizačnému plató odpovedajúcej ferimagnetickej fázy FI, ktoré je zobrazené na obr. 5 a). Je to spôsobené najväčšou možnou antikoreláciou medzi dvojicou susedných Heisenbergových spinov v rámci stavu singletného diméra. Zároveň dochádza aj k miernemu nárastu concurrence pre zvyšujúcu sa teplotu v okolí nulovej hodnoty vonkajšieho magnetického poľa, kedy systém prechádza v dôsledku teplotných excitácií z antiferomagnetickkej fázy AF do nízkoenergeticky excitovaného stavu odpovedajúceho ferimagnetickej fáze FI. Teplotná excitácia sa prejaví aj pri vyšších hodnotách vonkajšieho poľa,  $\frac{H}{J} > 1.25$ , kedy rastúca teplota môže paradoxne vyindukovať kvantové previazanie nad kvantovo nepreviazaným základným stavom. Krivka prahovej teploty zániku kvantového previazania v dôsledku tepelnej excitácie preto nie je funkciou vonkajšieho magnetického poľa - najprv pomaly klesá s rastúcim magnetickým poľom a potom sa otočí a klesá spolu s klesajúcim poľom. Táto závislosť koreluje so vznikom magnetizačného plató saturovanej paramagnetickej fázy - kvantové previazanie zaniká keď sa systém dostáva saturovanej paramagnetickej fázy v dôsledku klasického charakteru tejto fázy s nulovými kvantovými koreláciami. Krivka prahovej teploty zániku kvantového previazania zaniká pri rovnakej teplote,  $\frac{H}{J} = 1.25$ , ako krivka prahovej teploty kvantovej nelokálnosti zobrazenej na obr. 6.



Obr. 7: "Concurrence" ako funkcia teploty a vonkajšieho magnetického poľa pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 0.5$ . Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu zániku kvantového previazania.

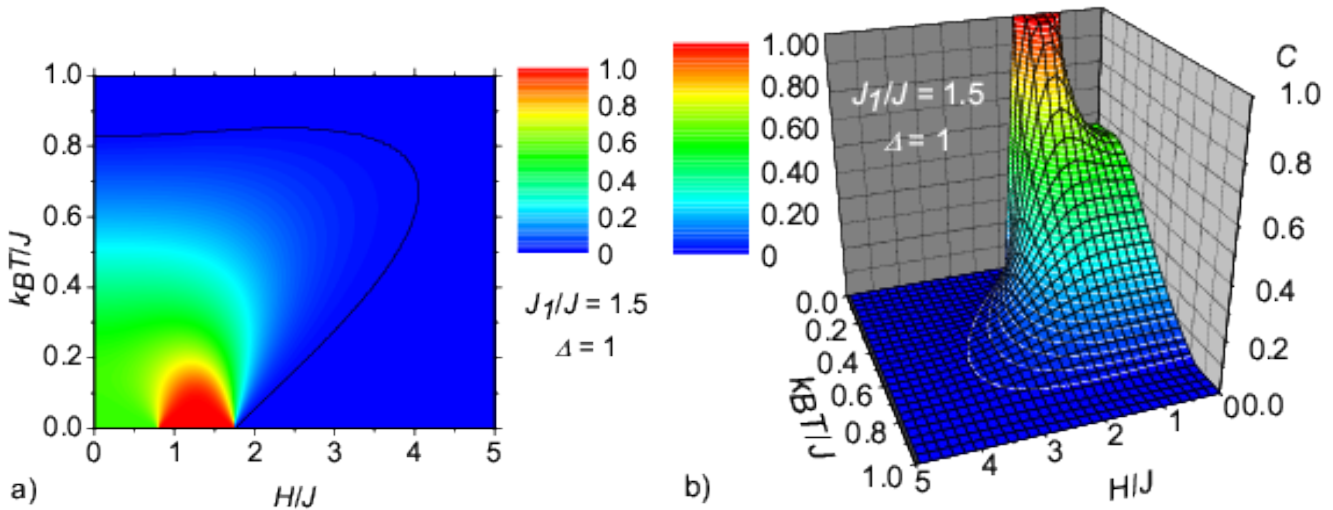
Na obr. 8 môžeme vidieť Bellovu funkciu pre pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 1.5$ . Pre hodnoty vonkajšieho magnetického poľa odpovedajúce antiferomagnetickému základnému stavu AF, dochádza k miernemu a krátkemu rastu kvantovej nelokálnosti s rastom teploty v dôsledku teplotných excitácie. Môžeme si všimnúť, že pri nulovej teplote dochádza k prudkému nárastu Bellovej funkcie až do jej maximálnej hodnoty  $2\sqrt{2}$  v okolí hodnoty vonkajšieho poľa  $\frac{H}{J} \approx 0.8$ , ktoré odpovedá fázovému prechodu z antiferomagnetickkej fázy AF do ferimagnetickej fázy FI. Prechod z ferimagnetickej fázy FI do saturovanej paramagnetickej fázy nastáva o niečo neskôr - pre hodnotu vonkajšieho magnetického poľa  $\frac{H}{J} = 1.75$ , preto aj nelokálnosť zaniká pri vyššom vonkajšom magnetickom poli pôsobiacom na systém ako tomu bolo v predchádzajúcom prípade. Krivka prahovej teploty ako funkcie vonkajšieho magnetického poľa je spočiatku klesajúca, môžeme si však všimnúť, že na krátkom intervale pre  $\frac{H}{J} > 1$ , svoj pokles spomaľuje a dochádza k jej miernemu nárastu. Je to spôsobené stále pomerne výrazným vplyvom ferimagnetickej fázy FI, ktorá má kvantovo nelokálnejší charakter ako antiferomagnetická fáza AF. Zaniká pre hodnotu vonkajšieho magnetického poľa  $\frac{H}{J} = 1.75$ .



Obr. 8: Bellova funkcia pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 1.5$  v závislosti od teploty a vonkajšom magnetickom poli. Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu, pod ktorou je systém kvantovo nelokálny.

Na obr. 9 je znázornená concurrence pre hodnotu pomeru Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 1.5$ . Takisto ako Bellova funkcia, aj concurrence pre hodnoty vonkajšieho poľa odpovedajúce antiferomagnetickkej fázy AF mierne a krátko narastá so zvyšujúcou sa teplotou v dôsledku tepelnej excitácie. Podobne ako u kvantovej nelokálnosti, aj teraz dochádza k prud-

kému nárastu termálnej previazanosti až kým systém nie je maximálne previazaný, čo je spôsobené prechodom z antiferomagnetickkej fázy AF do ferimagnetickej fázy FI. Najväčšie hodnoty nadobúda concurrence v parametrickej oblasti, ktorá odpovedá  $\frac{1}{3}$ -magnetizačnému plató ferimagnetickej fázy FI, znázorneného na obr. 5 b). Opäť dochádza k teplotne indukovanému vzniku termálneho previazania pre vyššie hodnoty magnetického poľa, tentoraz pre  $\frac{H}{J} > 1.75$ . Krivka prahovej teploty zo začiatku pomaly rastie so zväčšujúcim sa vonkajším magnetickým poľom, no potom sa otočí a ďalej klesá v smere znižujúceho sa poľa až kým nezanikne v nulovej teplote pre kritické magnetické pole  $\frac{H}{J} = 1.75$  odpovedajúce fázovému prechodu z ferimagnetickej fázy FI do saturovanej paramagnetickej fázy. Zánik kvantového previazania sa dá vysvetliť prechodom do saturovanej paramagnetickej fázy aj pre vyššie ako je nula - na obr. 5 b) môžeme vidieť, že plató tejto fázy vzniká pre podobné hodnoty teploty a vonkajšieho poľa ako zaniká previazanie.

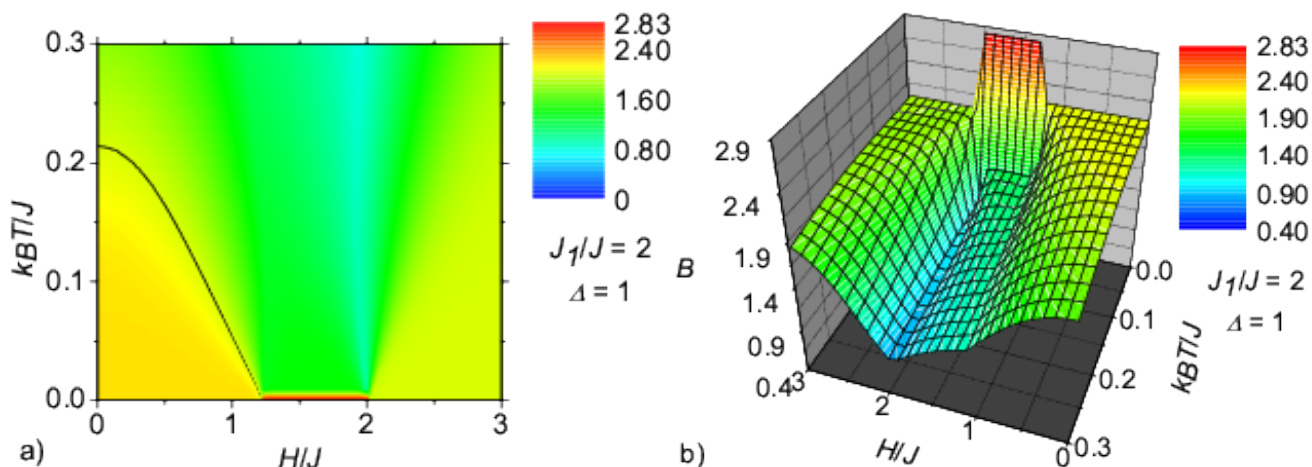


Obr. 9: "Concurrence" ako funkcia teploty a vonkajšieho magnetického poľa pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 1.5$ . Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu zániku kvantového previazania.

Na obr. 10 je znázornená Bellova funkcia pre dvojnásobnú hodnotu Isingovej interakcie oproti Heisenbergovej interakcii. Pri nulovej teplote sa pre malé hodnoty poľa nachádza systém v antiferomagnetickkej fáze, ale pre  $\frac{H}{J} = \sqrt{5} - 1$  až  $\frac{H}{J} = 2$  sa systém nachádza presne na fázovom rozhraní medzi ferimagnetickými fázami FI a FII. V tomto bode nastáva skok v hodnote Bellovej funkcie v nulovej teplote, ktorá dosahuje svoju maximálnu hodnotu. Bellova funkcia



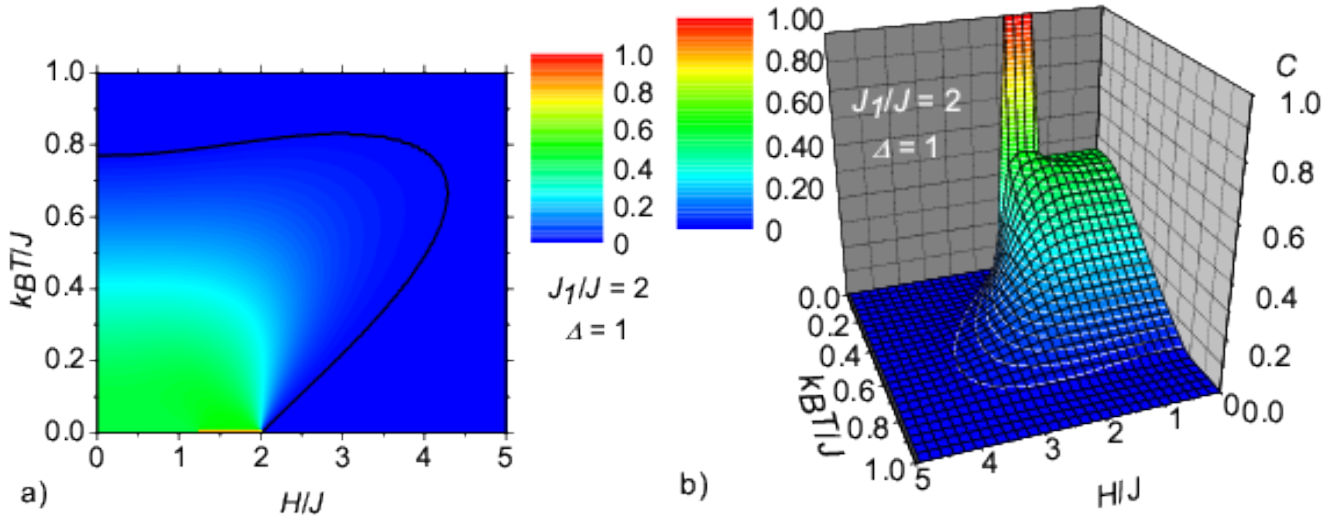
si udržiava svoju maximálnu hodnotu až kým nedôjde k fázovému prechodu do saturovanej paramagnetickej fázy. Krivka prahovej teploty je klesajúca až pokým sa systém nachádza v antiferomagnetickej fáze AF. Na rozhraní ferimagnetických fáz FI a FII je konštantná až kým systém neprejde do saturovanej paramagnetickej fázy v nulovej teplote pre  $\frac{H}{J} = 2$  kedy krivka prahovej teploty zaniká.



Obr. 10: Bellova funkcia pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 2$  v závislosti od teploty a vonkajšom magnetickom poli. Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu, pod ktorou je systém kvantovo nelokálny.

Pri concurrence, pre dvojnásobnú Isingovu interakciu voči Heisenbergovej interakcii (obr. 11), takisto dochádza pri nulovej teplote ku skokovému nárastu jej hodnoty až na maximum pri zániku antiferomagnetickej fázy. Dôvod je rovnaký ako v prípade Bellovej funkcie. Teraz však dochádza aj k miernemu nárastu hodnoty concurrence pre vyššie teploty (viď obr. 11 b)), ktoré zodpovedajú  $\frac{1}{3}$ -magnetizačnému plató na obr. 5 c) vznikajúcemu v dôsledku koexistencie ferimagnetických fáz FI a FII. Aj teraz dochádza k termálnemu previazaniu pre hodnoty vonkajšieho magnetického poľa, ktoré v základnom stave zodpovedajú saturovanej paramagnetickej fáze. Krivka prahovej teploty je zo začiatku mierne rastúca s rastúcim magnetickým poľom  $\frac{H}{J}$ , ale potom sa otočí a klesá so zápornou deriváciou až kým nezanikne pri nulovej teplote prechodom do saturovanej paramagnetickej fázy pre  $\frac{H}{J} = 2$ . Takisto ako v predchádzajúcom prípade  $\frac{J_1}{J} = 1.5$ , aj pre tento prípad je možné vysvetliť zánik termálneho previazania vznikom klasického plne saturovaného stavu (viď obr. 5 c)).

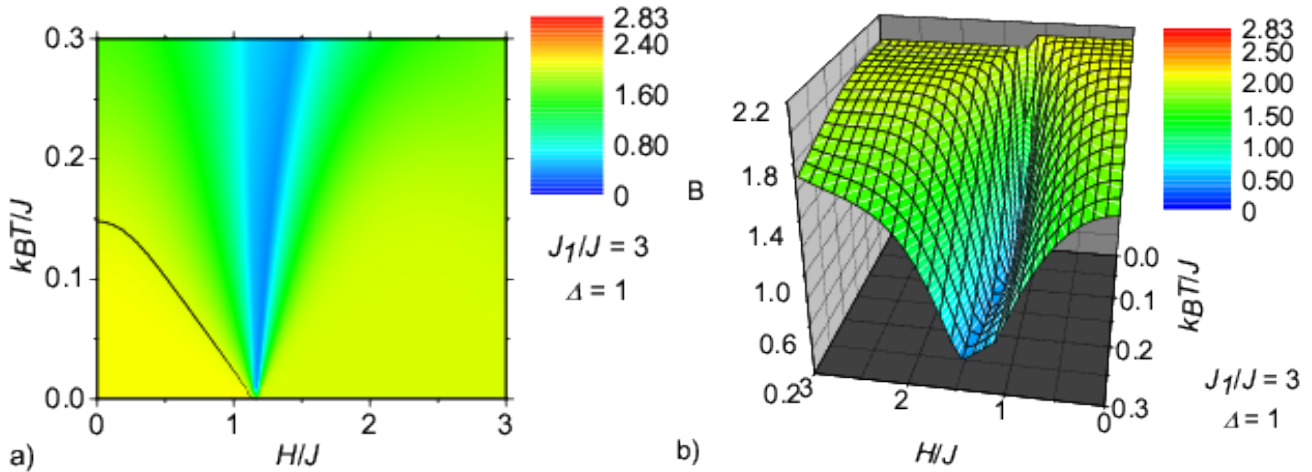
Na obr. 12 je znázornená Bellova funkcia pre pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie



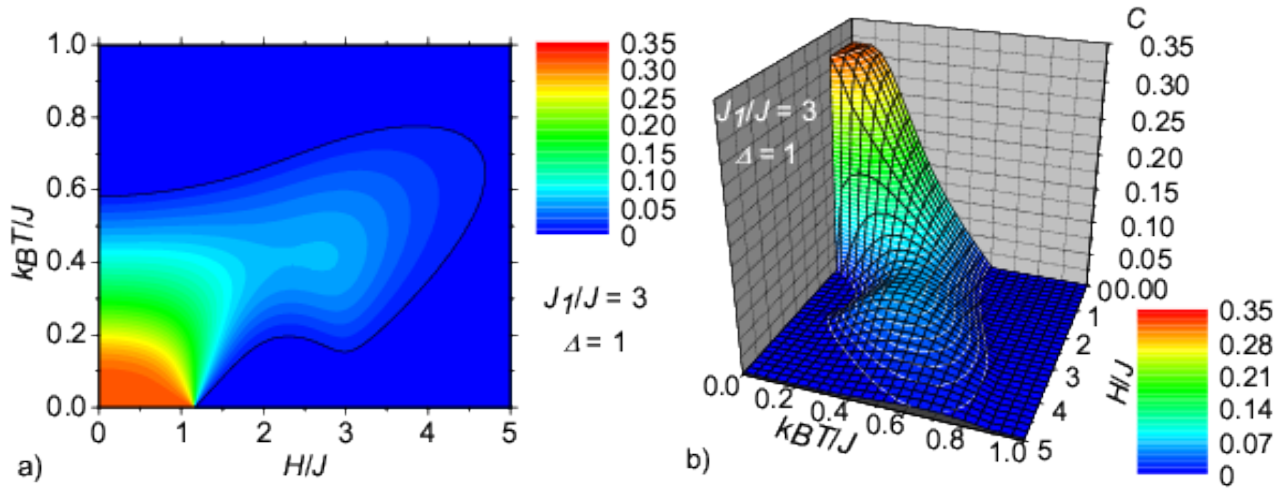
Obr. 11: "Concurrence" ako funkcia teploty a vonkajšieho magnetického poľa pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 2$ . Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu zániku kvantového previazania.

$\frac{J_1}{J} = 3$ . Systém je slabo kvantovo nelokálny len pri nízkej teplote a dostatočne malom magnetickom poli, ktoré odpovedajú nulovému magnetizačnému plató v dôsledku existencie kvantovej antiferomagnetickkej fázy AF na obr. 5 d). Prahová teplota je monotónne klesajúca funkcia od magnetického poľa a zaniká pri prechode z antiferomagnetickkej fázy AF do ferimagnetickej fázy FII, kedy vzniká veľký prepad v hodnote Bellovej funkcie, ktorá síce následne veľmi rýchlo vzrastie, ale už maximálne len na hodnotu  $\mathcal{B} = 2$ .

Na obr. 13 je vykreslená concurrence pre  $\frac{J_1}{J} = 3$ . Kvantová previazanosť dosahuje najvyššie hodnoty v nulovej teplote pre hodnoty vonkajšieho magnetického poľa odpovedajúce antiferomagnetickkej fáze AF - teda nulovému magnetizačnému plató pre danú hodnotu pomeru interakcií (obr. 5 d)). Dochádza ale k veľmi zaujímavému vzniku termálneho previazania nad kvantovo nepreviazanými základnými stavmi ferimagnetickej fázy FII a saturovanej paramagnetickej fázy pre hodnotu vonkajšieho magnetického poľa  $\frac{H}{J} \gtrsim 1.15$ , kedy dochádza k prechodu z ferimagnetickej fázy FII. Pre hodnoty vonkajšieho magnetického poľa  $\frac{H}{J} > 3$  dochádza k prechodu zo saturovanej fázy. Zväčšenie parametrickej oblasti termálneho previazania v okolí hodnoty vonkajšieho magnetického poľa  $\frac{H}{J} = 3$  odpovedá v základnom stave prechodu z ferimagnetickej fázy FII do saturovanej paramagnetickej fázy. Zánik previazanosti odpovedá dvom magnetickým plató - najprv  $\frac{1}{3}$  plató ferimagnetickej fázy II a následne aj saturovanému



Obr. 12: Bellova funkcia pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 3$  v závislosti od teploty a vonkajšom magnetickom poli. Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu, pod ktorou je systém kvantovo nelokálny.



Obr. 13: "Concurrence" ako funkcia teploty a vonkajšieho magnetického poľa pre anizotropný parameter  $\Delta = 1$  a pomer Isingovej a Heisenbergovej interakcie  $\frac{J_1}{J} = 3$ . Čierna krivka znázorňuje prahovú teplotu zániku kvantového previazania.

plató (viď obr. 5 d)). Zväčšenie parametrickej oblasti termálneho previazania korešponduje s hodnotami medzi týmito dvoma plató. Krivka prahovej teploty zaniká v nulovej teplote pre hodnotu vonkajšieho magnetického poľa, ktoré zodpovedá prechodu z antiferomagnetkej fázy AF do paramagnetickej fázy II.



## 4 Záver

Záverom môžeme povedať, že s rastúcou teplotou a rastúcou Isingovou interakciou zväčša klesá kvantová nelokálnosť ako aj kvantové previazanie systému. Toto tvrdenie ale nie je všeobecne platné keďže sa nám podarilo dokázať vznik termálneho previazania nelokálnosti v dôsledku teplotných excitácií z klasických základných stavov. Zaujímavé je aj zistenie, že ak je systém v nejakej oblasti kvantovo nelokálny, musí tam byť aj kvantovo previazaný, ale naopak to neplatí. Táto skutočnosť zrejme súvisí s väčšou odolnosťou kvantového previazania voči narastajúcim teplotám v porovnaní s kvantovou nelokálnosťou a môžeme teda konštatovať, že kvantové previazanie je tepelne odolnejšie voči svojmu zániku ako kvantová nelokálnosť. Ak sa systém dostane do stavu, ktorý odpovedá magnetizačnému plató určitej kvantovej fázy, jeho nelokálnosť aj previazanie rastie. Naopak, ak sa dostane do stavu, ktorý odpovedá magnetizačnému plató určitej klasickej fázy, jeho kvantová nelokálnosť aj previazanie zanikajú a môže dôjsť iba k termálnemu previazaniu vďaka teplotným excitáciám. Je to spôsobené tým, že stavy mimo klasických fáz môžu vykazovať väčšiu mieru kvantových korelácií aj pri vyšších teplotách.

## Literatúra

- [1] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? In *Physical Review*, 1935, roč. 47, s. 777 - 780.
- [2] BELL, J.S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. In *Physica*, 1964, roč. 47, č. 3, s. 195 - 200.
- [3] OSHIKAWA, M., YAMANAKA, M., AFFLECK, I. Magnetization Plateaus in Spin Chains: "Haldane Gap" for Half-Integer Spins. In *Physical Review Letters*, 1984, roč. 78, č. 10, s. 1984 - 1987.
- [4] STREČKA, J., JAŠČUR, M. Existence of a magnetization plateau in a class of exactly solvable Ising–Heisenberg chains. In *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2003, roč. 15, č. 26, s. 4519 - 4534.
- [5] FISHER, M. Transformations of Ising Models. In *Physical Review*, 1959, roč. 113, č. 4, s. 969 - 981.
- [6] KRAMERS, H. A., WANNIER, G. H. Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I. In *Physical Review*, 1941, roč. 60, č. 3, s. 252 - 262.
- [7] HORODECKI, R., HORODECKI, P., HORODECKI, M. Violating Bell inequality by mixed spin- $i$  states: necessary and sufficient condition. In *Physical Letters A*, 1995, roč. 200, s. 340 - 344.
- [8] CLAUSER, J.F., HORNE, M.A., SHIMONY, A., HOLT, R.A. Proposed Experiment to Test Local Hidden-variable Theories. In *Physical Review Letters*, 1969, roč. 23, č. 15, s. 880 - 884.
- [9] WOOTERS, W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. In *Physical Review Letters*, 1998, roč. 80, č. 10, s. 2245 - 2248.