

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



Výzkumný úkol

Termalizace rozdělení multiplicity

Bc. Radka Sochorová

Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Praha, 2017

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY
IN PRAGUE

Faculty of Nuclear Sciences and Physical
Engineering
Department of Physics



Research Project

Thermalisation of Multiplicity Distribution

Bc. Radka Sochorová

Supervisor: Doc. Dr. Boris Tomášik

Prague, 2017

NASCANOVAT PODEPSANE ZADANI A
ULOZIT DO DVOU EPS SOUBORU
ZADANI1.EPS a ZADANI2.EPS

NASCANOVAT PODEPSANE ZADANI A
ULOZIT DO DVOU EPS SOUBORU
ZADANI1.EPS a ZADANI2.EPS

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, software, atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

Radka Sochorová

Název práce:

Termalizace rozdělení multiplicity

Autor: Radka Sochorová

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Abstrakt:

Kvark-gluonové plazma (QGP) vznikající v rané fázi relativistické jaderné srážky je nedávno objevená forma husté a horké hmoty, ve které už běžné hadrony neexistují a ve které se kvarky a gluony stávají volnými.

Při rozpínání systému klesá jeho hustota energie. V určité chvíli se plazma změní na hadronový plyn. Tento proces nazýváme procesem hadronizace. Hadrony silně interagují a při dostatečně nízké hustotě energie mezi nimi nedochází k dalším rozptylům. Proces oddělení hadronů od fireballu nazýváme vymrznutí. Nejdříve při vyšší teplotě nastává chemické vymrznutí, při nižší teplotě pak nastane kinetické vymrznutí.

Hlavní motivací práce je pozorování, že celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic souhlasí se statistickým modelem při teplotách nad 160 MeV. Teplotu fázového přechodu je možno stanovit i pomocí metod QCD na mřížce. Je to teplota, při které se susceptibility jako funkce teploty mění nejrychleji. Tato teplota je kolem 150 MeV. Susceptibility různých řádů se přitom projevují ve vyšších momentech rozdělení multiplicity.

Cílem této práce je tedy zjistit, jak rychle různé momenty rozdělení multiplicity dosáhnou své rovnovážné hodnoty a jak se chovají dostane-li se systém mimo rovnováhu, například v důsledku rychlého poklesu teploty. Pokud se soubor částic začne vyvíjet s rozdělením multiplicity mimo rovnovážnou hodnotu, vývoj multiplicity je popsán pomocí řídicí rovnice, kterou k popisu použijeme.

Klíčová slova: Kvark-gluonové plazma, fázový přechod, kritický bod, rozdělení multiplicity, řídicí rovnice, generující funkce, faktoriální momenty, centrální momenty, koeficient šikmosti, koeficient špičatosti

Title:

Thermalisation of multiplicity distribution

Autor: Radka Sochorová

Abstract:

The quark-gluon plasma (QGP), which is produced in the early phase of an ultrarelativistic nuclear collision, is a newly-discovered form of matter, in which ordinary hadrons do not exist anymore, and in which quarks and gluons become free.

The system expands and so its energy density drops. At some point the plasma will change into a gas of hadrons. This process is called hadronisation. Hadrons interact strongly until the density is so low that no more scattering between hadrons occur. The process of decoupling of hadrons from the fireball is called freeze-out. First at the higher temperature chemical freeze-out occurs, then at a lower temperature there is kinetic freeze-out.

The main motivation of this work is that overall observed multiplicity of different types of particles from ultrarelativistic nuclear collisions agrees with the statistical model at temperatures above 160 MeV. The phase transition temperature can be determined by lattice QCD methods. It is a temperature at which susceptibilities as functions of temperature are changing fastest. This temperature is about 150 MeV. Susceptibilities of different orders manifest themselves in higher moments of the multiplicity distribution.

So the main aim of this work is to know how fast different moments of the multiplicity distribution approach their equilibrium value and how they evolve if the system slips off equilibrium, e.g. due to a decrease of temperature. If an ensemble starts with the multiplicity distribution out of equilibrium, the evolution of multiplicity is described by a master equation, which we shall use.

Key words: Quark-gluon plasma, phase transition, critical point, multiplicity distribution, master equation, generating function, factorial moments, central moments, skewness, kurtosis

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu mého výzkumného úkolu , Doc. Dr. Borisi Tomášikovi, za jeho ochotu, čas, pomoc, odborné rady a připomínky při vedení této práce. Dále bych chtěla poděkovat svým spolužákům a kamarádům za jejich podporu a cenné rady. Poděkování patří také mé rodině a mému příteli Janu Vozábovi za neustálou psychickou podporu po celou dobu zhotovování této práce.

Obsah

Úvod	15
1 Kvark-gluonové plasma	17
1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky	17
1.2 Kvantová chromodynamika (QCD)	18
1.3 QCD na mřížce	18
1.4 Kvark-gluonové plasma	20
1.5 Povaha fázového přechodu	23
1.5.1 Řád fázového přechodu při $\mu_B = 0$	23
1.5.2 Kritický bod	25
1.6 Horká a hustá hadronová hmota	26
1.7 Malý třesk	26
2 Časoprostorový vývoj ultrarelativistické srážky těžkých iontů	29
2.1 Proces produkce částic	29
2.2 Termalizace	29
2.3 Hydrodynamická expanze	30
2.4 Tepelné vymrznutí	31
2.5 Chemické vymrznutí	32
3 Rozdělení multiplicity	35
3.1 Motivace	35
3.2 Úvod	35
3.3 Rovnice pro změnu multiplicity	36
3.4 Multiplicita v rovnovážném stavu a relaxační čas	38
3.5 Řídící rovnice	40
3.6 Generující funkce	41
3.7 Faktoriální momenty	42
3.7.1 Centrální momenty	45
3.8 Numerické řešení řídicí rovnice	46
3.8.1 Počáteční podmínky	46

3.8.2	Časový vývoj faktoriálních momentů	47
3.8.3	Výsledky	47
4	Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase	53
4.1	Motivace	53
4.2	Chemické složení a reakce	53
4.3	Účinné průřezy pro produkci kaonů	54
4.4	Řídící rovnice závislá na teplotě	55
4.5	Reakce $\pi N \rightarrow K\Lambda$	56
4.6	Výsledky	58
4.6.1	Konstantní teplota	58
4.6.2	Náhlá změna teploty	61
4.6.3	Postupná změna teploty	66
4.6.4	Teplota vymrznutí	72
5	Centrální momenty	75
5.1	Rovnovážné hodnoty centrálních momentů	75
5.2	Časový vývoj centrálních momentů	79
5.2.1	Další poměry centrálních momentů	84
	Závěr	89
A	Příloha: Vztahy pro modifikované Besselovy funkce	91
B	Příloha: Tabulky zdánlivých teplot a zdánlivých časů vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty	94
	Příloha B: Tabulky zdánlivé teploty a zdánlivého času vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty	94

Seznam obrázků

1.1	Fázový diagram QCD	19
1.2	Schéma uvěznění kvarků	20
1.3	Porovnání chování teploty	22

1.4	Fázový přechod prvního druhu	23
1.5	Závislost kritického chování QCD na hodnotě kvarkových hmotností	24
1.6	Malý třesk	27
1.7	Velký třesk	28
2.1	Časoprostorový vývoj srážky	30
2.2	Schéma hadronové polévky	33
3.1	Časový vývoj 2. faktoriálního momentu pro různá N_0	48
3.2	Faktoriální momenty pro binomické počáteční podmínky	49
3.3	Faktoriální momenty pro poissonovské počáteční podmínky	50
3.4	Faktoriální momenty předělené rovnovážnými hodnotami	51
4.1	4. faktoriální moment pro různé teploty T	59
4.2	4. faktoriální moment pro různé teploty T s 200krát větším účinným průřezem	60
4.3	Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez	62
4.4	Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez	63
4.5	Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez	64
4.6	Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez	65
4.7	Závislost relaxačního času na teplotě	66
4.8	Závislost relaxačního času na normálním čase	67
4.9	Závislost teploty T na normálním čase	68
4.10	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez	69
4.11	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez	70
4.12	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez	70
4.13	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez	71
4.14	Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez	72

4.15	Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez	73
4.16	Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez	73
4.17	Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez	74
5.1	Zdánlivá teplota vymrznutí počtu částic pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	80
5.2	Zdánlivá teplota vymrznutí variance pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	81
5.3	Zdánlivá teplota vymrznutí směrodatné odchylky pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	81
5.4	Zdánlivá teplota vymrznutí 3. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	82
5.5	Zdánlivá teplota vymrznutí 4. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	82
5.6	Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu šikmosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	83
5.7	Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu špičatosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	83
5.8	Koeficient R_{32} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	85
5.9	Koeficient R_{42} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	85
5.10	Koeficient R_{12} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	86
5.11	Koeficient R_{31} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy	86

Seznam tabulek

4.1	Hodnoty termalizačního času pro různé násobky účinného průřezu	68
4.2	Hodnoty relaxačního času pro různé násobky účinného průřezu	69

B.1	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 30 krát větší účinný průřez	94
B.2	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 100 krát větší účinný průřez	94
B.3	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 200 krát větší účinný průřez	94
B.4	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 400 krát větší účinný průřez	94
B.5	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro normu	95
B.6	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro varianci	95
B.7	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro směrodatnou odchylku	95
B.8	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro 3. centrální moment	95
B.9	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro 4. centrální moment	95
B.10	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient šikmosti	96
B.11	Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient špičatosti	96

Úvod

Jednou z oblastí zájmu současné částicové fyziky je studium horké a husté hadronové hmoty nazývané kvark-gluonové plazma (QGP), ve které už běžné hadrony neexistují a ve které nejsou kvarky a gluony vázány v hadronech. Toto médium vzniká v rané fázi ultra-relativistické jaderné srážky. Celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic z těchto srážek souhlasí se statistickým modelem nad 160 MeV. Na druhé straně je možné teplotu fázového přechodu stanovit i pomocí metod QCD na mřížce. Je to teplota, při které se susceptibilita jako funkce teploty mění nejrychleji. Susceptibilita se přitom projevuje ve vyšších momentech rozdělení multiplicity.

První kapitola je věnována kvark-gluonovému plazmatu. Stručně je zde zmíněna kvantová chromodynamika a QCD na mřížce. Dále je zde pozornost věnována povaze fázového přechodu a kritickému bodu. Zmíněn je zde také Malý třesk, tedy analogie mezi fyzikou relativistických srážek a fyzikou raného vesmíru.

V druhé kapitole se věnujeme časoprostorovému vývoji ultrarelativistických srážek těžkých iontů, tj. procesu produkce částic, termalizaci, hydrodynamické expanzi a také tepelnému a chemickému vymrznutí.

V další kapitole je popsáno rozdělení multiplicity. Je zde uvedena rovnice pro změnu multiplicity, vztah pro rovnovážnou hodnotu multiplicity, dále potom řídicí rovnice a generující funkce. Nejdůležitější součástí této kapitoly je potom odvození rovnovážných hodnot faktoriálních momentů a samotné řešení řídicí rovnice. Jsou zde také popsány zvolené počáteční podmínky pro řídicí rovnici.

Následující kapitola je věnována řídicí rovnici závislé na teplotě a na reálném čase. V této kapitole zavedeme účinné průřezy pro produkci kaonů a budeme se věnovat rovnici $\pi N \rightarrow K\Lambda$. Podíváme se, co se stane, když teplotu snížíme náhle nebo ji necháme klesat postupně.

Poslední pátá kapitola je věnována centrálním momentům a jejich poměrům jako je např. koeficient šikmosti a koeficient špičatosti.

1 Kvark-gluonové plasma

1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky

Fyzika ultrarelativistických srážek těžkých iontů spojuje fyziku vysokých energií s jadernou fyzikou. Název "těžké ionty" označuje těžká atomová jádra, zatímco výraz "ultrarelativistická energie" se používá pro energetickou oblast, kde je kinetická energie mnohem vyšší než zbytek energie.

Fyzika vysokých energií se zabývá jednotlivými částicemi (leptony, kvarky a hadrony) a interakce jsou odvozeny z prvních principů. Na druhé straně je jaderná fyzika o komplikovaných objektech (jádrech) a interakce jsou popsány efektivními modely. V ultrarelativistických srážkách těžkých iontů je snaha o pochopení vlastností husté a horké (hadronové) hmoty na úrovni elementárních interakcí. Velice důležité jsou experimentálně zkoumané fáze hadronové hmoty, stanovení fázového přechodu mezi těmito fázemi a možná rekonstrukce fázového diagramu silně interagující hmoty v závislosti na teplotě T nebo baryochemickém potenciálu μ_B [1].

První experimenty zkoumající srážky ultrarelativistických těžkých iontů s energiemi nad 10 GeV na nukleon v paprsku projektilu byly provedeny v BNL ("Brookhaven National Laboratory") a v CERNu ("European Organisation for Nuclear Research") v roce 1986.

V ultrarelativistických srážkách těžkých iontů je produkováno velké množství částic. Počet částic nazýváme částicovou multiplicitou. Hmoty, která je ve srážkách tvořena, žije jen po velice krátkou dobu, rychle expanduje a chladne. Proto je přirozené předpokládat, že bude časoprostorový vývoj probíhat daleko od rovnovážné hodnoty.

1.2 Kvantová chromodynamika (QCD)

Při jaderných srážkách vzniká při vysokých energiích systém silně interagujících částic. Fundamentální teorie silné interakce je nazývána kvantová chromodynamika. Je to teorie kvarků a gluonů, které jsou uvězněné v hadronech (baryonech a mezonech). Fázový diagram QCD je naznačen na Obr. 1.1.

Kvantová chromodynamika je teorie, jejímž nábojem je tzv. barva. Jednou z nejdůležitějších vlastností QCD je barevné uvěznění, které je opakem asymptotické volnosti. Je to jev, při kterém nemůžou být barevně nabitě částice jako kvarky a gluony odděleny jako samostatné objekty. To znamená, že kvarky a gluony nemůžou být přímo pozorované. Uvěznění můžeme demonstrovat na struně napnuté mezi dvěma kvarky, které se od sebe snažíme oddálit jako na Obr. 1.2.

Pokud se od sebe kvarky rychle oddalují, narůstá potenciální energie uložená ve struně. V určitou chvíli je energie už příliš vysoká a struna praskne, to znamená vytvoření kvark-antikvarkových párů. Z těchto párů potom vznikají hadrony. Jaderná síla působící mezi baryonama a mesonama může být v určitém smyslu chápána jako zbytková síla mezi kvarkama a gluonama. Jake je např. chemická (Van der Waalsova) síla zbytkovou silou elektromagnetické interakce.

1.3 QCD na mřížce

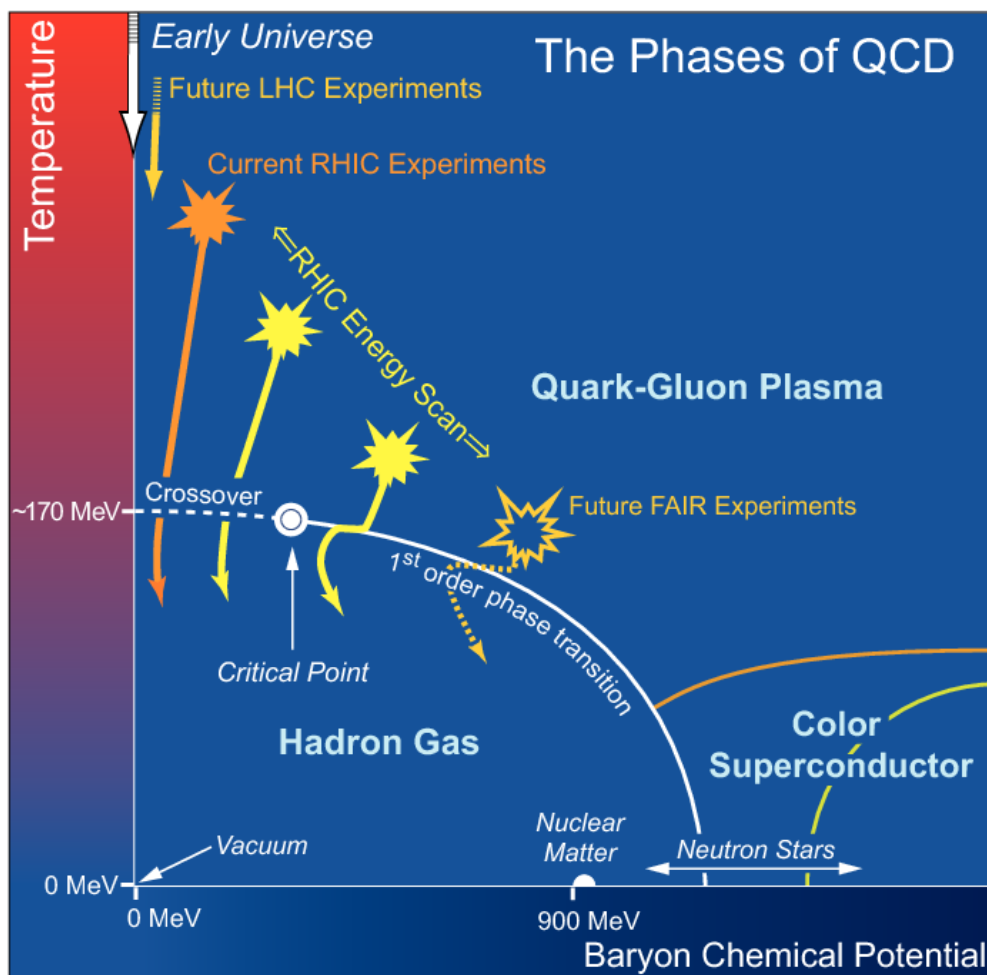
Ve všech dalších vztazích budeme pokládat $\hbar^1=c=k_B^2=1$.

Základní poznatky o QCD fázovém přechodu můžeme získat ze studia QCD na diskretizované časoprostorové mřížce. Čas je v tomto případě imaginární. Jedním z důvodů je, že je roven převrácené hodnotě teploty T . Je to ale také proto, že jsme ve statistické fyzice a to, co nás zajímá, je výpočet partiční sumy, ve které je váhovací faktor $\exp(-E/T)$. Ten je podobný faktoru $\exp(-iE \cdot t)$, který popisuje časový vývoj stavu v kvantové mechanice. Formálně se z váhovacího faktoru stane předpis pro časový vývoj, když nahradíme $1/T$ imaginárním časem.

¹redukováná Planckova konstanta $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ [1]

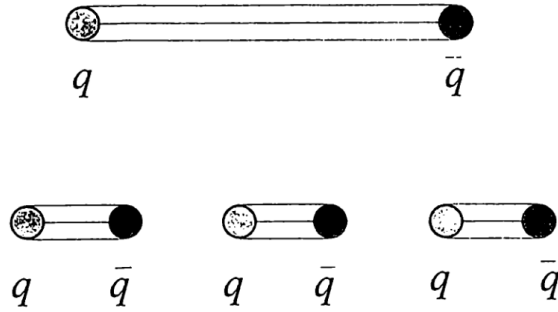
²Boltzmannova konstanta $k_B = 8,625 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/K}$ [1]

1.3 QCD na mřížce



Obrázek 1.1: Fázový diagram QCD, ve kterém μ je baryochemický potenciál, který určuje baryonovou hustotu systému, a T je teplota. Plná bílá čára znázorňuje čáru fázového přechodu mezi partony a hadrony a končí kritickým bodem. Při menších hodnotách μ_B se vyskytuje cross-over přechod. Převzato z [2].

V takovémto případě můžeme počítat partiční funkci pomocí metody Monte Carlo.



Obrázek 1.2: Schéma uvěznění kvarků. Převzato z [1].

Grandkanonická partiční funkce je definována vztahem

$$Z \equiv \exp\left(-\frac{\Omega}{T}\right) = Tr \left[\exp\left(-\frac{\hat{H} - \mu_B \hat{N}_B}{T}\right) \right], \quad (1.1)$$

kde T je teplota, Ω je grandkanonický potenciál, \hat{H} je hamiltonián, μ_B je baryochemický potenciál a \hat{N}_B je operátor počtu baryonů.

Z partiční funkce můžeme odvodit výrazy pro tlak, entropii, energii a počet baryonů

$$P = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T, \mu_B}, \quad S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V, \mu_B}, \quad N_B = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_B}\right)_{T, V} \quad (1.2)$$

a

$$E = TS - PV + \mu_B N_B. \quad (1.3)$$

Teoreticky výpočty QCD na mřížce dobře popisují kvark-gluonové plazma i hadronovou fázi. V praxi jsou však obzvláště při nízkých teplotách omezeny efekty konečné velikosti a dalšími problémy.

1.4 Kvark-gluonové plazma

Hlavní motivací ultrarelativistických srážek těžkých iontů je pozorování dvou fázových přechodů předpovídaných kvantovou chromodynamikou. Jsou to chirální fázový přechod a

1.4 Kvark-gluonové plasma

fázový přechod osvobození kvarků. Jak už bylo řečeno, za normálních podmínek (normální tlak a teplota na Zemi) jsou kvarky a gluony uvězněny v hadronech. Při zvyšování teploty T nebo při zvyšování baryonové hustoty může nastat stav, ve kterém už nebudou kvarky a gluony vázány v hadronech a stanou se relevantními stupni volnosti. Přechod od hadronové hmoty ke kvark-gluonovému plazmatu můžeme ilustrovat na velmi jednoduchém modelu. Pro ideální plyn nehmotných pionů je tlak jako funkce teploty dán Stefan-Boltzmannovým vztahem

$$P_\pi = 3 \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (1.4)$$

kde faktor 3 označuje tři různé nábojové stavy pionu (π^\pm, π^0).

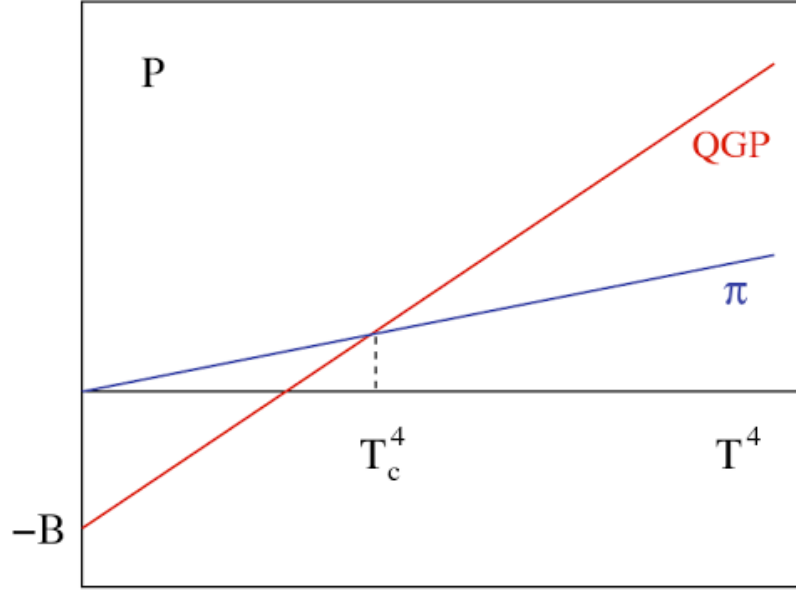
Příslušný vztah pro kvark-gluonové plasma zahrnující tři barvy a dvě vůně má tvar

$$P_{qg} = \left\{ 2 \times 8 + \frac{7}{8} (3 \times 2 \times 2 \times 2) \right\} \frac{\pi^2}{90} T^4 - B = 37 \frac{\pi^2}{90} T^4 - B. \quad (1.5)$$

V rovnici (1.5) označuje člen 2×8 dva spiny a osm barevných stupňů volnosti gluonů, $7/8$ uvažujeme kvůli správné statistice a výraz $3 \times 2 \times 2 \times 2$ je zde pro tři barvy, dvě vůně, dva spiny a dva stupně volnosti kvark-antikvark pro kvarky. Výraz (1.5) je původně převzat ze záření černého tělesa, kde je odvozen pro fotonový plyn (tedy pro plyn bosonů s nulovou hmotností). Integrály přes všechny hybnostní stavy fermionů vypadají jinak než bosonové integrály. Přesto se ukazuje, že pro nehmotné fermiony je jediným rozdílem poměrně jednoduchý faktor $7/8$. Tlak B je zde proto, abychom započítali rozdíl mezi fyzikálním vakuem a základním stavem pro kvarky a gluony v médiu.

Systém si vždy podle termodynamických zákonů vybírá stav o nejnižší volné energii a tudíž s nejvyšším tlakem. Na Obr. 1.3 je vidět porovnání chování tlaku pro rovnice (1.4) a (1.5).

Tento model tedy vede k dvou-fázové představě silně interagující hmoty, ve které existuje hadronová hmota až do kritické teploty T_c dané vztahem



Obrázek 1.3: Porovnání chování teploty pro ideální plyn (rovnice (1.4)) a pro kvark-gluonové plazma (rovnice (1.5)). Převzato z [3].

$$T_c = \left(\frac{45}{17\pi^2} \right)^{1/4} B^{1/4} \approx 0.72 \cdot B^{1/4} \quad (1.6)$$

a poté se mění v kvark-gluonové plazma.

Z hadronové spektroskopie je tlak B dán jako $B^{1/4} \approx 0.2$ GeV, takže dostáváme hodnotu teploty fázového přechodu

$$T_c \cong 150 \text{ MeV}. \quad (1.7)$$

Hustota energie obou fází modelu je dána vztahem

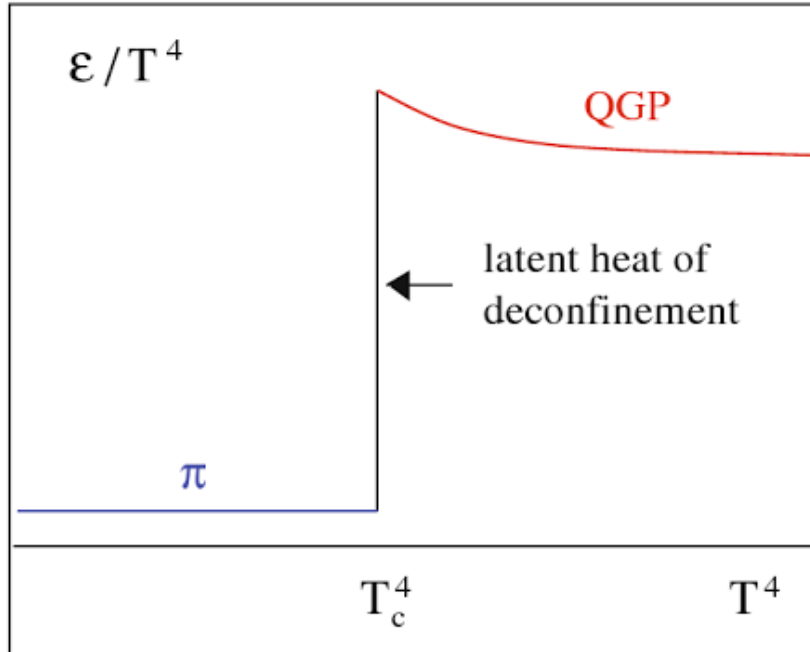
$$\epsilon_\pi = \frac{\pi^2}{10} T^4 \quad (1.8)$$

a

$$\epsilon_{qg} = 37 \frac{\pi^2}{30} T^4 + B. \quad (1.9)$$

1.5 Povaha fázového přechodu

V tomto modelu je fázový přechod mezi hadronovou hmotou a kvark-gluonovým plazmatem prvního řádu. Výsledná závislost na teplotě T je potom vykreslena na Obr. 1.4. Při kritické teplotě T_c roste hustota energie díky latentnímu teple.



Obrázek 1.4: Fázový přechod prvního druhu. Převzato z [3].

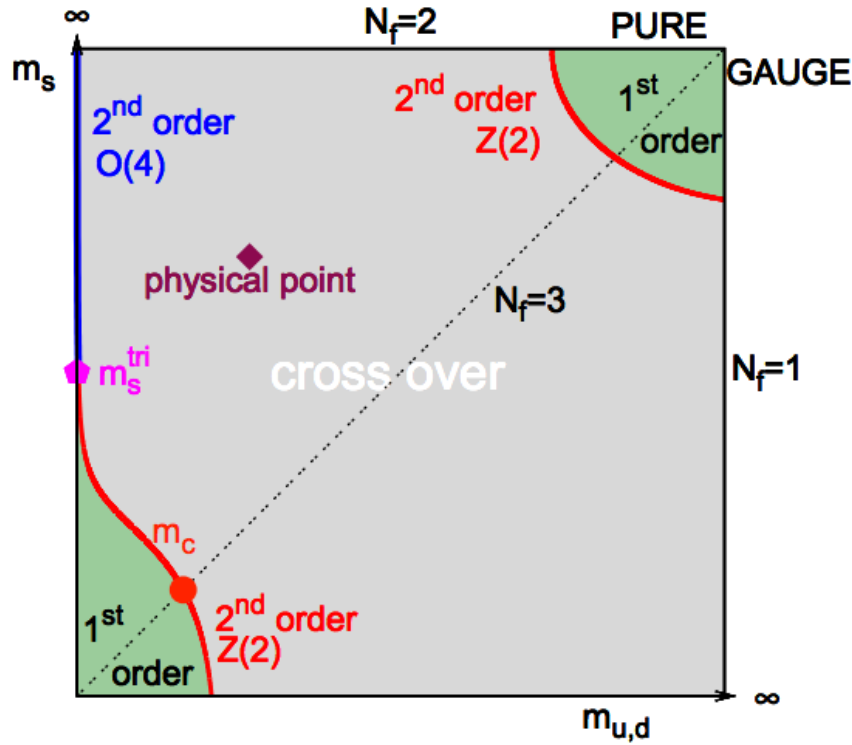
Vztahy v kapitole 1.4 byly převzány z [3].

1.5 Povaha fázového přechodu

V této části budeme uvažovat tři druhy kvarků u , d , s . Nejdříve popíšeme chování fázového přechodu pro nulovou baryonovou hustotu ($\mu_B = 0$) a potom přejdeme k popisu pro $\mu_B \neq 0$.

1.5.1 Řád fázového přechodu při $\mu_B = 0$

Řád fázového přechodu vychází ze simulací QCD na mřížce a závisí na počtu druhů kvarků a na hmotnosti kvarků. Pro nulový baryochemický potenciál $\mu_B = 0$ jsou výsledky shrnuty na Obr. 1.7, původní práce [4] a [5].



Obrázek 1.5: Závislost kritického chování QCD na hodnotě kvarkových hmotností. Tato závislost je známá pod názvem "Columbia plot". Převzato z [20].

- V limitě $m_u, m_d, m_s \rightarrow \infty$ máme pouze kalibrační teorii, protože kvarky se ničeho neúčastní a efektivně máme pouze gluony.
- Pro limitu $m_u = m_d = m_s \rightarrow 0$ dostáváme chirální fázový přechod, který je fázovým přechodem prvního druhu.
- Pro $m_u, m_d = 0$ a m_s je větší než hodnota trojkritického bodu m_s^{tri} , fázový přechod je druhého druhu.
- "Fyzikální bod" odpovídá malým hodnotám m_u a m_d , zatímco $m_s > m_s^{tri}$. Podle současných pozorování tento bod odpovídá hladkému cross-over přechodu. To znamená, že nenastává žádný pravý fázový přechod, ale nastává rychlá změna v malém intervalu teploty.
- Pro všechny hodnoty m_u, m_d, m_s se parametry chirální susceptibilita $\chi(T)$ a Polyakovova smyčka $L(T)$ ostře mění s teplotou. A tudíž můžeme dobře definovat kritický bod T_c .

1.5 Povaha fázového přechodu

- Fázový přechod potom závisí na počtu vůní N_f a na hmotnosti kvarků. Může to být skutečný fázový přechod (prvního nebo druhého druhu) nebo rychlý cross-over přechod.

Ukazuje se tedy, že v plazmatu máme neporuchové efekty, které ale nejsou ještě úplně pochopeny. Z výpočtů QCD na mřížce získáváme kritickou teplotu $T_c = 173$ MeV [1].

1.5.2 Kritický bod

Nyní budeme uvažovat nenulovou konečnou hodnotu baryonové hustoty (a tudíž $\mu_B \neq 0$). To znamená, že je počet baryonů vyšší než počet antibaryonů. V tomto případě nefunguje klasický postup, jakým QCD na mřížce funguje.

V současné době máme v QCD přibližný fázový diagram hmoty a jejich stavů v rovině baryochemického potenciálu μ_B a teploty T . Fázový diagram je na Obr. 1.1. Dominantní je zde čára (plná bílá) fázového přechodu mezi partony a hadrony, která končí kritickým bodem a která plynule interpoluje mezi dvěma extrémy.

První ze zmíněných extrémů nastává, pokud převládá stlačování hmoty, při kterém jde teplota $T \rightarrow 0$ a baryochemický potenciál $\mu_B > 1$ GeV. V tomto případě očekáváme fázový přechod prvního druhu. Pro hodnotu $\mu_B(E) \geq 300$ MeV [6] je dosaženo kritického bodu, ve kterém dochází k fázovému přechodu 2. druhu. Pro malé hodnoty baryochemického potenciálu μ_B , nalevo od kritického bodu, nastává fázový cross-over přechod neboli rychlý přechod.

Druhý extrém nastává v případě, že převažuje ohřívání hmoty při vysoké teplotě T a nízké hodnotě baryochemického potenciálu μ_B . Při takto nízké hodnotě baryochemického potenciálu μ_B QCD předpokládá, že kritická teplota přechodu mezi konfinovanou a dekonfinovanou fází hmoty je přibližně $T_{krit} \approx 170$ MeV. Tato teplota odpovídá hustotě energie přibližně $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. V tomto případě se nejedná o fázový přechod prvního druhu, ale pouze o plynulý přechod od jedné fáze k druhé. V současnosti je snaha tento přechod najít a změřit [3].

1.6 Horká a hustá hadronová hmota

Důležité informace o vlastnostech horké a husté hadronové hmoty získáváme studiem vysokoenergetických jaderných reakcí. Horkou a hustou hadronovou hmotou označujeme stav, ve kterém mohou být hadrony považovány za relevantní stupně volnosti. Jedinou možností, jak v laboratorních podmínkách stlačit a zahřát jadernou hmotu jsou srážky těžkých iontů.

Informace získané z těchto srážek nám mohou pomoci při tvoření modelů neutronových hvězd a explozí supernov. Už při energiích řádově několik GeV na nukleon můžeme pozorovat zajímavé jevy jako je kolektivní tok nebo podprahová produkce částic.

1.7 Malý třesk

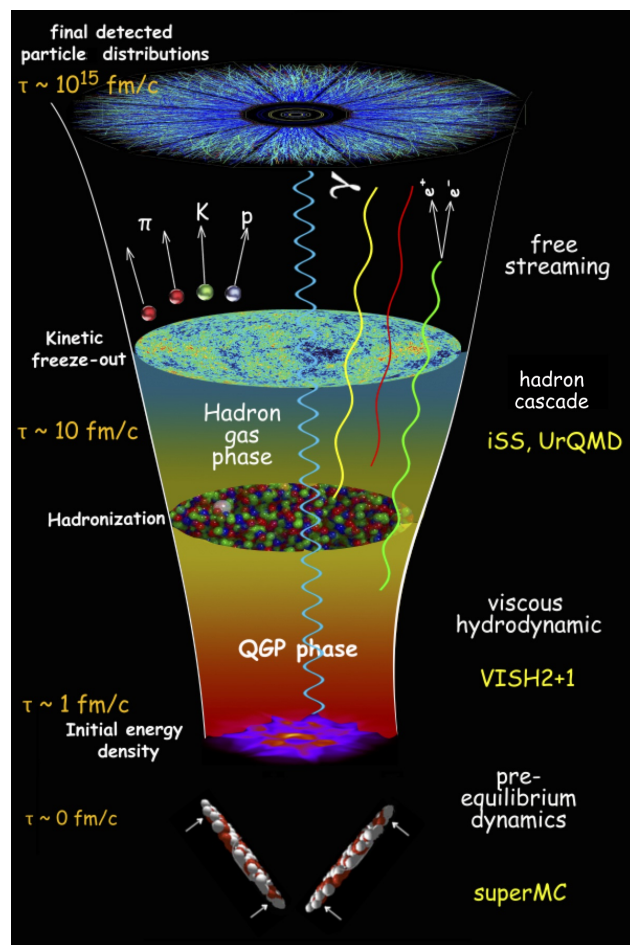
Mezi fyzikou relativistických srážek těžkých iontů a fyzikou raného vesmíru existuje několik analogií [1].

Mikrovlnné záření, které pozorujeme, má Planckovo spektrum. Teplota tohoto spektra je posunuta pomocí červeného posuvu z původní hodnoty 3000 K na hodnotu 2.7 K. V relativistických srážkách těžkých iontů vidíme posun hadronového p_T spektra díky modrému posuvu, který je zapříčiněn silným tokem v příčném směru. Vidíme tedy, že jak ve srážkách těžkých iontů, tak při Velkém třesku obsahují pozorovaná hybnostní spektra termální fyziku, která je modifikovaná pomocí kolektivní dynamiky.

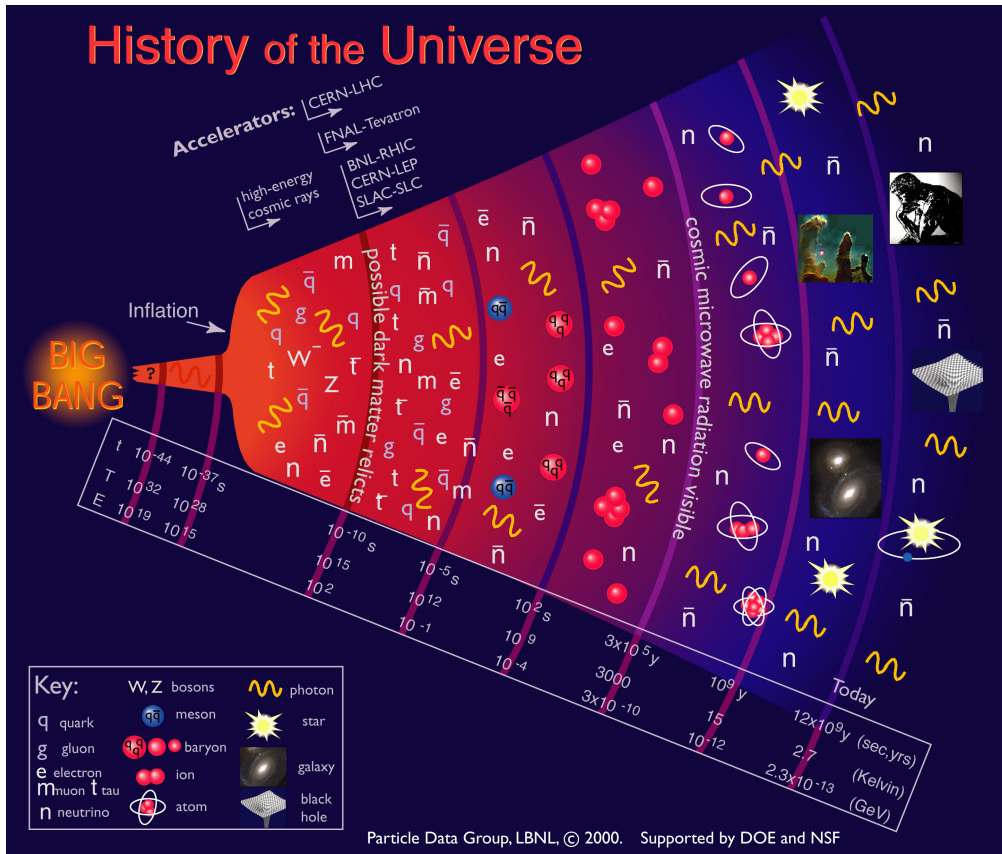
Reliktní záření se od hmoty oddělilo dlouho poté, co nastala syntéza nukleonů. Tato situace je podobná dvěma vymrznutím - kinetickému a chemickému vymrznutí. Nejdůležitější podobností je studium anizotropie rozdělení jak u hadronů tak u reliktního záření. Tato rozdělení nám něco říkají o struktuře zdroje - vesmíru nebo fireballu.

Díky vlastnostem uvedeným výše jsou relativistické srážky těžkých iontů nazývány Malým třeskem. Je důležité ale podotknout, že Velký třesk a relativistické srážky těžkých iontů mají i řadu odlišných vlastností. Mezi tyto odlišné vlastnosti patří např. přitažlivá gravitační síla. Malý třesk je na Obr. 1.6 a Velký třesk na Obr. 1.7.

1.7 Malý třesk



Obrázek 1.6: Malý třesk. Převzato z [7].



Obrázek 1.7: Velký třesk. Převzato z [8].

2 Časoprostorový vývoj ultrarelativistické srážky těžkých iontů

V této kapitole se budeme zabývat časoprostorovým vývojem hmoty vytvořené v relativistické srážce těžkých iontů. Vývoj hmoty v centrální oblasti je měřen pomocí podélného vlastního času $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$.

2.1 Proces produkce částic

Po srážce dvou jader se systém rychle vyvíjí v expandující, horkou a hustou hmotu kvarků a gluonů. Existuje několik přístupů, jak přechod k horkému a hustému systému kvarků a gluonů popsat, například QCD roztržení struny, QCD kaskádní model, CGC ³, který se vyvíjí v glasma a poté v kvark-gluonové plazma.

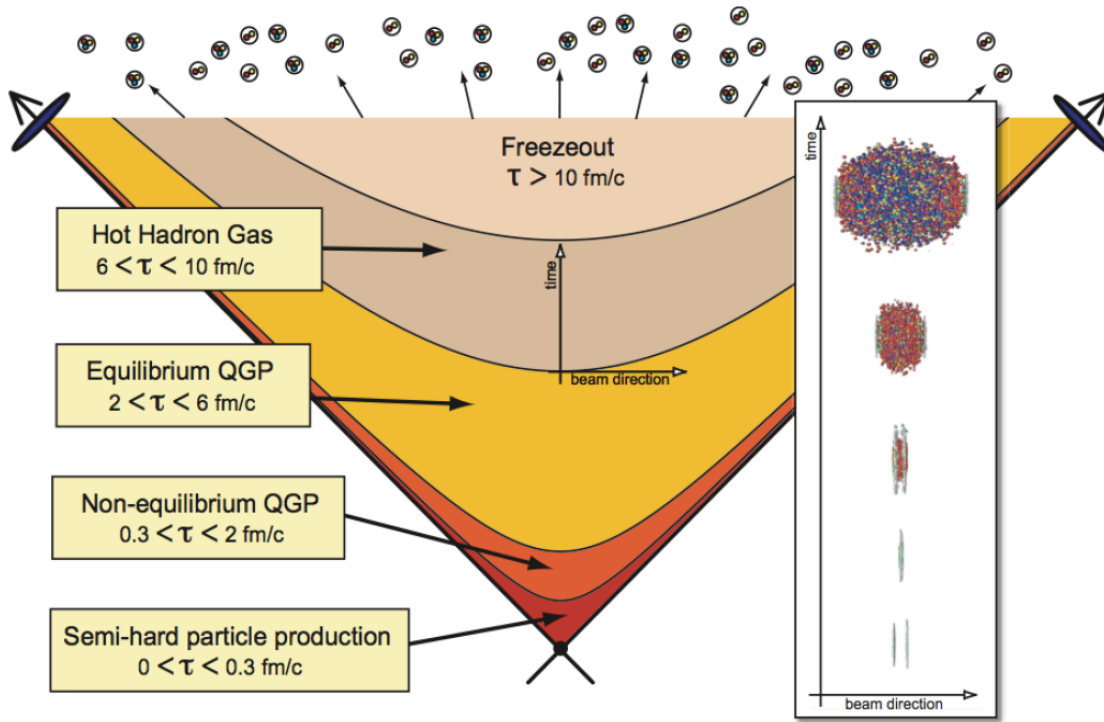
Časoprostorový vývoj ultrarelativistické srážky je na Obr. 2.1.

2.2 Termalizace

Experimentální data z RHICu ukazují, že čas termalizace (čas potřebný k dosažení rovnovážného rozdělení energie) je $\tau_{term} < 1$ fm. Tento výsledek podporuje pozorování velkého eliptického toku, který je způsoben hydrodynamickou expanzí. Bereme-li v úvahu silně vázané kvark-gluonové plazma, přirozeně získáme dobu termalizace 1 fm. Čas termalizace okolo 1 fm lze vysvětlit pomocí poruchové i nové neporuchové kvantové chromodynamiky [1].

³Color Glass Condensate, efektivní teorie, která byla vyvinuta s cílem organizovat výpočty procesů v saturační oblasti [11]

2 ČASOPROSTOROVÝ VÝVOJ ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ



Obrázek 2.1: Časoprostorový diagram ultrarelativistické jaderné srážky. V soustavě hmotného středu partony, které se pohybují pomaleji, hadronizují dříve než ty pohybující se rychleji. Při vysokých energiích se vývoj systému řídí podélným vlastním časem $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$. Převzato z [9].

2.3 Hydrodynamická expanze

K popisu produkce a opětovnému rozptylu partonů se obvykle používá relativistická kinetická teorie.

Lokálně termalizované kvark-gluonové plazma se tvoří pouze v případě, že je proces termalizace dostatečně rychlý. V takovém případě může být vývoj systému popsán pomocí rovnic relativistické hydrodynamiky dokonalé tekutiny. Hydrodynamické rovnice popisují lokální zákony zachování energie, hybnosti, baryonového čísla, podivnosti atd. Dále musíme znát stavovou rovnici hmoty, kterou získáme ze simulací QCD na mřížce. Hydrodynamické výpočty zprostředkovávají v tomto případě spojení mezi základními principy QCD a dynamickými

2.4 Tepelné vymrznutí

vlastnostmi rozpínajícího se fireballu.

V důsledku expanze se termodynamické vlastnosti hadronové hmoty velmi rychle mění. Toto pozorování souhlasí s faktem, že je zde přítomný fázový přechod z kvark-gluonového plazmatu vysoké teploty ($T > T_c$) do hadronového plynu o nízké teplotě ($T < T_c \sim 170$ MeV) [1].

Pokud je tento přechod prvního druhu, můžeme předpokládat 3 kroky ve vývoji hmoty procházející fázovým přechodem. Nejprve je hmota adiabaticky se rozpínajícím kvark-gluonovým plazmatem, poté se hmota změní ve směs fáze plazmatu a hadronového plynu a nakonec hmota expanduje do hadronového plynu.

2.4 Tepelné vymrznutí

Tepelné neboli kinetické vymrznutí nastává ve chvíli, kdy hadrony přestanou interagovat. Při tepelném vymrznutí přechází systém ze silně vázaného stavu do úplně volného systému neinteragujících hadronů. Tento přechod od jednoho stavu do druhého je vyvolán rozpínáním hmoty, které způsobuje rychlý nárůst střední volné dráhy částic λ . Tepelné vymrznutí nastává ve chvíli, kdy $\tau_{kol} \sim \lambda$ překoná τ_{exp} , kde τ_{kol} je čas spojený se srážkou a τ_{exp} je čas spojený s rozpínáním.

V tomto případě se od sebe částice vzdálí tak moc, že se srážkové procesy stanou neefektivní. Tepelné vymrznutí tedy nastává ve chvíli, kdy

$$\tau_{kol} \geq \tau_{exp}, \quad (2.1)$$

kde typický čas mezi srážkami odhadneme jako převrácenou hodnotu součinu hustoty částic n a účinného průřezu σ

$$\tau_{kol} \sim \frac{1}{\sigma n}. \quad (2.2)$$

Doba rozpínání je charakterizovaná divergencí čtyřrychlosti u^μ , která popisuje hydrodynamický tok hmoty jako

2 ČASOPROSTOROVÝ VÝVOJ ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ

$$\tau_{exp} \sim \frac{1}{\partial_{\mu} u^{\mu}}. \quad (2.3)$$

Jednodušší kritérium předpokládá, že tepelné vymrznutí nastává v čase, ve kterém je střední volná dráha hadronů stejného řádu jako velikost systému. Obecně můžeme říci, že se částice s různým účinným průřezem oddělí od zbytku hmoty v různý čas.

Pokud je rozpínání hmoty rychlé, potom je tepelné vymrznutí také rychlé, hybnostní rozdělení částic je zmrazeno a částice se volně pohybují k detektoru. Z měření spektra v příčné hybnosti můžeme získat informaci o stavu hmoty těsně před tepelným vymrznutím.

2.5 Chemické vymrznutí

Před tepelným vymrznutím nastává chemické vymrznutí. Podstata chemického vymrznutí je založena na pozorování, že při ochlazování hadronového systému je velice pravděpodobné, že neelastické srážky mezi hadrony skončí dříve než elastické srážky. Říkáme, že chemické vymrznutí nastalo ve chvíli, kdy skončily neelastické srážky. Obecně pro teploty vymrznutí platí

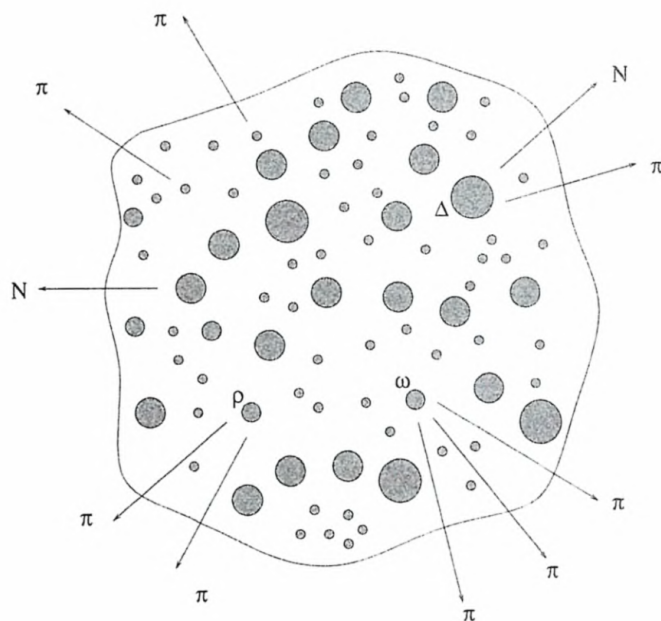
$$T_{chem} \geq T_{tep}, \quad (2.4)$$

kde T_{chem} je teplota chemického vymrznutí. Teplotu chemického vymrznutí lze odvodit z poměrů měřených hadronových multiplicit.

Při vývoji systému z chemického do tepelného vymrznutí jsou dominantní elastické srážky, např. $\pi + \pi \rightarrow \rho \rightarrow \pi + \pi$ nebo $\pi + N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$ a silné rozpady těžších rezonancí, jejichž rozpadem vznikají stabilní hadrony. Schéma rozpadu rezonancí je na Obr. 2.2.

Hmota je při chemickém vymrznutí charakterizována několika termodynamickými veličinami jako jsou teplota, chemický potenciál a fugacita.

2.5 Chemické vymrznutí



Obrázek 2.2: Schéma hadronové polévky vytvořené v relativistické srážce těžkých iontů při procesu vymrznutí. Těžší rezonance se následně rozpadají na stabilní hadrony. Převzato z [1].

Typická doba života fireballu je v řádech desítek fm/c, což je $\sim 10^{-22}$ s a typický rozměr je v řádu 10 fm. Typické měřítko silného rozpadu je v řádu 1 fm. V porovnání se silným rozpadem je tedy fireball větší a žije déle. Rozdělení částic je charakterizováno pomocí Bose-Einsteinovy nebo Fermi-Diracovy statistiky [12].

3 Rozdělení multiplicity

3.1 Motivace

Hlavní motivací následujících kapitol je pozorování, že celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic z ultrarelativistických jaderných srážek souhlasí se statistickým modelem při teplotách nad 160 MeV. Na druhé straně teplotu fázového přechodu je možné stanovit i pomocí metod QCD na mřížce. Je to teplota, při které se susceptibility jako funkce teploty mění nejrychleji. Tato teplota je okolo 150 MeV. Susceptibilita se přitom projevuje ve vyšších momentech rozdělení multiplicity [10].

Cílem je tedy zjistit, jak rychle různé momenty rozdělení multiplicity dosáhnou své rovnovážné hodnoty. Pokud se soubor systémů částic začne vyvíjet s rozdělením multiplicity mimo rovnovážnou hodnotu, vývoj multiplicity je popsán pomocí řídicí rovnice, kterou k popisu použijeme.

3.2 Úvod

Relativistická statistická termodynamika byla používána k popisu částicové produkce ve vysokoenergetických srážkách těžkých iontů. Nedávné analýzy ukázaly, že statistický model dává uspokojivý popis multiplicit většiny hadronů měřených ve srážkách $A - A$ v BNL a CERNu. Dynamika částicového rovnovážného stavu a chemické rovnováhy není ovšem stále úplně pochopena [13].

Produkce částic je obvykle popsána za pomoci grandkanonického souboru, ve kterém jsou průměrné multiplicity kontrolovány pomocí chemického potenciálu. V tomto popisu fluktuuje čistá hodnota náboje (např. elektrického, baryonového, podivného, půvabného, ...) daná $U(1)$. Je-li částic mnoho, můžeme fluktuace připustit, přestože se náboje v podstatě musí zachovávat - čili bychom neměli mít žádné fluktuace. V opačném případě, když bude produkce částic řídká, musíme použít kanonický soubor.

Ukazuje se, že kanonický statistický model dobře popisuje výtěžek částic měřených v

nízko-energetických reakcích těžkých iontů a vysoko-energetických hadron-jaderných srážek, hadron-hadronových srážek a e^+e^- reakcí. Fluktuace budou jiné pro kanonický a jiné pro grandkanonický soubor. Proto je nezbytné do výpočtů zahrnout fluktuace multiplicity [13].

Fluktuace řídkce se vyskytujících částic jsou velmi citlivou sondou stupně rovnováhy dosaženého v dané srážce. Takovéto měření může poskytnout první přímý experimentální důkaz pro chemickou rovnováhu v reakcích těžkých iontů [14].

3.3 Rovnice pro změnu multiplicity

Uvažujme binární proces $a_1a_2 \rightarrow b_1b_2$, kde $a \neq b$. Pak je rovnice pro změnu multiplicity popsána populační rovnicí

$$\frac{d\langle N_{b_1} \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N_{b_1} \rangle \langle N_{b_2} \rangle, \quad (3.1)$$

kde $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$ je kreační člen a $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$ je anihilační člen, přičemž σ_G resp. σ_L je průměrný účinný průřez pro proces $a_1a_2 \rightarrow b_1b_2$ resp. pro proces $b_1b_2 \rightarrow a_1a_2$, N_k určuje celkový počet částic k , V je vlastní objem reakce. Typickým příkladem tohoto procesu je produkce/anihilace kaonu $\pi^+\pi^- \leftrightarrow K^+K^-$. Rovnice pro změnu multiplicity (3.1) nemůže být použita v případě řídké produkce částic a silné korelace pomocí přesného zachování náboje.

Abychom mohli zahrnout korelaci mezi produkcí/anihilací částic b_1 a b_2 , definujeme pravděpodobnost $P_{i,j}$, že najdeme i částic b_1 a j částic b_2 v 1 eventu. Dále definujeme pravděpodobnost P_i , že najdeme i částic b v 1 eventu. Průměrný počet částic b v eventu je definován jako

$$\langle N_b \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i. \quad (3.2)$$

Potom je obecná rovnice pro průměrnou částicovou multiplicitu dána vztahem

$$\frac{d\langle N_{b_1} \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \sum_{i,j} ijP_{i,j}. \quad (3.3)$$

3.3 Rovnice pro změnu multiplicity

Aby byla zachována vnitřní symetrie $U(1)$ (v případě kaonů podivnost), musí částice b_1 a b_2 nést opačný náboj. Aby platila $U(1)$ nábojová neutralita systému, musí platit $N \equiv N_{b_1} \equiv N_{b_2}$.

Potom máme

$$P_{i,j} = P_i \delta_{ij}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i,j} ij P_{i,j} = \sum_i i^2 P_i \equiv \langle N^2 \rangle = \langle N \rangle^2 + \langle \delta N^2 \rangle, \quad (3.5)$$

kde $\langle \delta N^2 \rangle$ reprezentuje "event-by-event" fluktuace počtu $b_1 b_2$ párů.

Po celou dobu předpokládáme, že máme velký počet částic a_1 a a_2 (např. pionů), takže můžeme zanedbat "event-by-event" fluktuace jejich multiplicit a změnu jejich počtu během procesu.

Pomocí rovnic (3.4) a (3.5) můžeme přepsat rovnici (3.3) do tvaru

$$\frac{d \langle N \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N^2 \rangle. \quad (3.6)$$

Pokud vzniká velký počet párů $b_1 b_2$, tj. $\langle N \rangle \gg 1$, potom platí

$$\langle N^2 \rangle \approx \langle N \rangle^2 \quad (3.7)$$

a rovnice (3.6) přejde do tvaru

$$\frac{d \langle N \rangle}{d\tau} \approx \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N \rangle^2. \quad (3.8)$$

Pokud vzniká malý počet párů $b_1 b_2$, tj. $\langle N \rangle \ll 1$, rovnice (3.1) a (3.8) už dále neplatí. V tomto případě máme $P_1 \gg P_i$ pro $i \geq 2$, potom

$$\langle N^2 \rangle \approx \langle N \rangle, \quad (3.9)$$

čímž přejde rovnice (3.6) do tvaru

$$\frac{d\langle N \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N \rangle. \quad (3.10)$$

Z rovnice (3.8) vidíme, že pro případ $\langle N \rangle \gg 1$ závisí absorpční člen na počtu párů $b_1 b_2$ kvadraticky, zatímco pro $\langle N \rangle \ll 1$ pouze lineárně.

Vztahy v kapitole 3.3 byly převzaty z [13].

3.4 Multiplicita v rovnovážném stavu a relaxační čas

Abychom mohli ilustrovat rozdíly v časovém vývoji malého a velkého počtu částic, budeme předpokládat dva limitní případy: $\langle N \rangle \gg 1$ a $\langle N \rangle \ll 1$. Budeme uvažovat systém se stálou teplotou, objemem a s nulovým počtem počátečních $b_1 b_2$ párů, tj. $\langle N \rangle(\tau = 0) = 0$.

V limitě $\langle N \rangle \gg 1$ platí rovnice (3.8) a její řešení má tvar

$$\langle N \rangle^{GC}(\tau) = N_{eq}^{GC} \tanh(\tau/\tau_0^{GC}), \quad (3.11)$$

kde N_{eq}^{GC} je rovnovážná hodnota pro počet $b_1 b_2$ párů a τ_0^{GC} je relaxační čas. Tyto konstanty jsou dány vztahy

$$N_{eq}^{GC} = \sqrt{\epsilon}, \quad \tau_0^{GC} = \frac{V}{L\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.12)$$

kde

$$\epsilon = G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L. \quad (3.13)$$

V případě, kdy jsou rozdělení hybností částic tepelná, "gain term" (G) a "loss term" (L) jsou tepelné průměry účinných průřezů pro produkci a absorpci. Potom po zanedbání kvantové statistiky platí

$$\frac{G}{L} = \frac{d_{b_1} \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1}) d_{b_2} \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2})}{d_{a_1} \alpha_{a_1}^2 K_2(\alpha_{a_1}) d_{a_2} \alpha_{a_2}^2 K_2(\alpha_{a_2})}, \quad (3.14)$$

3.4 Multiplicita v rovnovážném stavu a relaxační čas

kde d_k jsou degenerační faktory, $\alpha_k \equiv \frac{m_k}{T}$ a K_2 jsou modifikované Besselovy funkce.

Rovnovážná hodnota pro počet $b_1 b_2$ párů pak přejde z rovnice (3.12) do tvaru

$$N_{eq}^{GC} = \frac{1}{2\pi^2} VT^3 \sqrt{d_{b_1} \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1})} \sqrt{d_{b_2} \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2})}. \quad (3.15)$$

Rovnovážná hodnota je tedy popsána pomocí grandkanonických výsledků bez chemického potenciálu díky U(1) nábojové neutralitě systému.

V limitě $\langle N \rangle \ll 1$ je časový vývoj popsán rovnicí (3.10), která má následující řešení

$$\langle N \rangle^C(\tau) = N_{eq}^C (1 - \exp(-\tau/\tau_0^C)), \quad (3.16)$$

s rovnovážnou hodnotou a relaxačním časem ve tvaru

$$N_{eq}^C = \epsilon, \quad \tau_0^C = \frac{V}{L}. \quad (3.17)$$

Pro tepelné rozdělení hybností má rovnovážná hodnota multiplicity $b_1 b_2$ párů tvar

$$N_{eq}^C = \left[\frac{d_{b_1}}{2\pi^2} VT^3 \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1}) \right] \cdot \left[\frac{d_{b_2}}{2\pi^2} VT^3 \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2}) \right]. \quad (3.18)$$

Tato rovnice ukazuje lokální nábojové zachování U(1). Pro každou částici b_1 je vyprodukována ve stejném eventu i částice b_2 s opačným nábojem, aby se zachoval lokálně náboj. Tento výsledek je očekáván z kanonického formalismu zákonů zachování.

Rovnice (3.18) vyjadřuje pouze vedoucí člen rozvoje kanonického výsledku pro multiplicity částic nesoucích U(1) náboje. Obecný výraz má tvar

$$N_{eq}^C = N_{eq}^{GC} \frac{I_1(2N_{eq} q^{GC})}{I_0(2N_{eq} q^{GC})}, \quad (3.19)$$

kde hodnota N_{eq}^{GC} je dána rovnicí (3.15) a I_i jsou modifikované Besselovy funkce.

Nyní porovnáme rovnice (3.12) a (3.17).

Pro $\langle N \rangle \ll 1$ je rovnovážná hodnota multiplicity v kanonickém formalismu mnohem menší než hodnota, která je předpokládána z grandkanonického výsledku

$$N_{eq}^C = (N_{eq}^{GC})^2 \ll N_{eq}^{GC}. \quad (3.20)$$

Z rovnice (3.20) vidíme, že kanonický formalismus je pro popis nábojového zachování pro malou multiplicitu nabitých částic velice důležitý.

Hustota částic v grandkanonické limitě nezávisí na objemu V , zatímco v kanonické limitě se hustota škáluje s $1/V$.

Za druhé platí, že relaxační čas pro kanonický systém je mnohem kratší než pro grandkanonický systém

$$\tau_0^C = \tau_0^{GC} N_{eq}^{GC} \ll \tau_0^{GC} \quad (3.21)$$

díky malému počtu částic ($N_{eq}^{GC} \ll 1$).

Grandkanonické výsledky souhlasí s malými fluktuacemi počtu $b_1 b_2$ párů ($\langle \delta N^2 \rangle / \langle N \rangle^2 \ll 1$), zatímco kanonický popis souhlasí pro velké fluktuace počtu $b_1 b_2$ párů.

Vztahy v kapitole 3.4 byly převzaty z [13].

3.5 Řídící rovnice

V této kapitole formulujeme obecnou rovnici vývoje multiplicity systému, která je platná pro libovolnou hodnotu $\langle N \rangle$. Tato rovnice se nazývá řídicí rovnice pro pravděpodobnost $P_n(\tau)$, že najdeme n párů $b_1 b_2$ v čase τ . Tato pravděpodobnost se zvětšuje přechodem systému ze stavů $n - 1$ nebo $n + 1$ do stavu n , a naopak zmenšuje se přechody systému ze stavu n do stavů $n - 1$, anebo $n + 1$.

Pro binární proces $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$, kde $a \neq b$, jako je např. reakce $\pi + N \rightarrow K + \Lambda$, má řídicí rovnice potom tvar

$$\frac{dP_n}{d\tau} = \epsilon [P_{n-1} - P_n] - [n^2 P_n - (n+1)^2 P_{n+1}], \quad (3.22)$$

kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ϵ je definováno vztahem (3.13) a bezrozměrná časová proměnná τ má tvar

3.6 Generující funkce

$$\tau = t \frac{L}{V}, \quad (3.23)$$

takže τ je měřeno v jednotkách relaxačního času $\tau_0^C = V/L$.

Rovnice (3.22) musí být řešena numericky.

Vztahy v kapitole 3.5 byly převzaty z [14].

3.6 Generující funkce

Vynásobením rovnice (3.22) n a vysumováním přes n obdržíme obecnou rovnici pro rozdělení multiplicity (3.6). Rovnice (3.22) obsahuje ovšem mnohem více informací než rovnice pro rozdělení multiplicity (3.6).

Rovnici (3.22) pro pravděpodobnosti P_n můžeme převést na parciální diferenciální rovnici pro generující funkci

$$g(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau). \quad (3.24)$$

Vynásobením rovnice (3.22) x^n a vysčítáním přes n dostaneme

$$\frac{\partial g(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{L}{V}(1-x)(xg'' + g' - \epsilon g), \quad (3.25)$$

kde $g' \equiv \frac{\partial g}{\partial x}$. Je zřejmé, že $g(1, \tau)$ se nemění v čase, což je ekvivalentní zachování celkové pravděpodobnosti.

Řešení v rovnovážném stavu získáme po vyřešení rovnice

$$xg_{eq}'' + g_{eq}' - \epsilon g_{eq} = 0. \quad (3.26)$$

Po zavedení substituce $x = y^2/(4\epsilon)$ můžeme rovnici (3.26) redukovat na Besselovu rovnici.

Řešení, které je regulární v $x = 0$ ($g(0) = P_0 \leq 1$), je dáno vztahem

$$g_{eq.}(x) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})} \quad (3.27)$$

s normalizací $g(1) = \sum P_n = 1$.

Rovnovážné rozdělení pravděpodobnosti P_n získáme z rovnic (3.24) a (3.27) ve tvaru

$$P_{n,eq} = \frac{\epsilon^n}{I_0(2\sqrt{\epsilon})(n!)^2} \quad (3.28)$$

a hodnota pro průměrný počet $b_1 b_2$ párů v 1 eventu v rovnováze je dána jako

$$\langle N \rangle_{eq} = g'_{eq.}(1). \quad (3.29)$$

Vztahy v kapitole 3.6 byly převzaty z [13].

3.7 Faktoriální momenty

Faktoriální momenty získáme pomocí derivací generující funkce. Normovaný druhý faktoriální moment F_2 je definovaný vztahem $F_2 = \langle N(N-1) \rangle / \langle N \rangle^2$, normovaný třetí faktoriální moment F_3 vztahem $F_3 = \langle N(N-1)(N-2) \rangle / \langle N \rangle^3$ a normovaný čtvrtý faktoriální moment F_4 vztahem $F_4 = \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle / \langle N \rangle^4$.

Abychom získali rovnovážnou hodnotu 1. faktoriálního momentu (normy) $\langle N \rangle_{eq.}$, musíme zderivovat funkci (3.27). První derivace funkce (3.27) má tvar

$$g'_{eq.}(x) = \sqrt{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{I'_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}. \quad (3.30)$$

Po použití vztahu (A.21) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce I_0

$$I'_0(z) = I_1(z) \quad (3.31)$$

dostaneme vztah pro 1. faktoriální moment (střední hodnotu $\langle N \rangle$) ve tvaru

3.7 Faktoriální momenty

$$\langle N \rangle_{eq.} = g'_{eq.}(1) = \sqrt{\varepsilon} \frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (3.32)$$

Druhá derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned} g''_{eq.}(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}x^{-3/2}\frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I''_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}x^{-3/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon\frac{1}{x}\frac{I'_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Po použití vztahu (A.22) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce I_1

$$I'_1(z) = \frac{1}{2}(I_2(z) + I_0(z)) \quad (3.34)$$

dostaneme vztah pro 2. faktoriální moment (střední hodnotu $\langle N(N-1) \rangle$) ve tvaru

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq.} = g''_{eq.}(1) = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (3.35)$$

Třetí derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned} g'''_{eq.}(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}\frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}x^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I'_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &+ \varepsilon\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon\frac{1}{x}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I'_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}x^{-5/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{x^2}\frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_2(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &- \varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2}x^{-3/2}\frac{I'_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Po použití vztahu (A.23) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce I_2

$$I_2'(z) = \frac{1}{2}(I_3(z) + I_1(z)) \quad (3.37)$$

dostaneme vztah pro 3. faktoriální moment (střední hodnotu $\langle N(N-1)(N-2) \rangle$) ve tvaru

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq.} &= g_{eq.}'''(1) = \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Čtvrtá derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned} g_{eq.}^{IV.}(x) &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-7/2} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} x^{-5/2} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{I_1'(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad - \frac{3}{4}\varepsilon \frac{1}{x^2} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{I_2'(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0'(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon(-2) \frac{1}{x^3} \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon x})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2} x^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{3I_1'(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_3'(2\sqrt{\varepsilon x})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon} x^{-7/2} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\varepsilon \frac{1}{x^3} \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2} x^{-5/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon x})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{3}{2}\varepsilon \frac{1}{x^3} \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{2}\varepsilon^{3/2} x^{-5/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon x})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{1}{x^2} \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon x}) + 3I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + 2I_3'(2\sqrt{\varepsilon x})}{8I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon} x^{-7/2} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{15}{8}\varepsilon \frac{1}{x^3} \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2} x^{-5/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \frac{1}{x^2} \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon x}) + 3I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + 2I_3'(2\sqrt{\varepsilon x})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Po použití vztahu (A.24) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy

3.7 Faktoriální momenty

funkce I_3

$$I_3'(z) = \frac{1}{2}(I_4(z) + I_2(z)) \quad (3.40)$$

dostaneme vztah pro 4. faktoriální moment (střední hodnotu $\langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle$) ve tvaru

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq.} = g_{eq.}^{IV}(1) = & -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ & - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.7.1 Centrální momenty

Postupnými úpravami lze z rovnic (3.32), (3.35), (3.38) a (3.41) vyjádřit centrální momenty $\langle(N - \langle N \rangle)\rangle$, $\langle(N - \langle N \rangle)^2\rangle$, $\langle(N - \langle N \rangle)^3\rangle$ a $\langle(N - \langle N \rangle)^4\rangle$.

Z těchto hodnot pak můžeme vyjádřit koeficient šikmosti a koeficient špičatosti.

Koeficient šikmosti je definován vztahem

$$\gamma_1 = \frac{\langle(N - \langle N \rangle)^3\rangle}{\langle(N - \langle N \rangle)^2\rangle^{3/2}} \quad (3.42)$$

a pro koeficient špičatosti platí vztah

$$\gamma_2 = \frac{\langle(N - \langle N \rangle)^4\rangle}{\langle(N - \langle N \rangle)^2\rangle^2} - 3. \quad (3.43)$$

Vztahy (3.42) a (3.43) byly převzaty z [17].

3.8 Numerické řešení řídicí rovnice

3.8.1 Počáteční podmínky

Můžou nastat dva případy:

1. Počáteční počet částic předpokládáme menší než je hodnota v rovnovážném stavu. Tomuto předpokladu odpovídá např. proces produkce kaonů v $1A$ GeV srážce těžkých iontů.
2. Počáteční počet částic předpokládáme větší než je hodnota v rovnovážném stavu. Tento případ je např. produkce půvabu v $200A$ GeV srážkách těžkých iontů [14].

Na jednu stranu můžeme předpokládat, že na počátku máme v daném eventu maximálně 1 částici. V tomto případě mají počáteční podmínky tvar

$$P_0(\tau = 0) = 1 - N_0, \quad (3.44)$$

$$P_1(\tau = 0) = N_0, \quad (3.45)$$

$$P_n(\tau = 0) = 0, \quad n > 1, \quad (3.46)$$

kde N_0 je počáteční průměrný počet částic.

Tyto počáteční podmínky nazýváme binomickými počátečními podmínkami. Druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment v tomto případě začíná v 0 a poté rychle dosáhne svého maxima v čase

$$\tau_{max} = \frac{N_0}{\langle N \rangle_{eq}} \quad (3.47)$$

a pro $N_0 / \langle N \rangle_{eq} \ll 1$ je maximální hodnota druhého faktoriálního momentu $F_2^{max} \simeq 1$.

Proto se faktoriální momenty blíží shora ke své rovnovážné hodnotě a měření momentů potom bude indikovat stupeň rovnováhy, které bylo dosaženo ve srážce těžkých iontů. Přesný čas, kdy momenty dosáhnou maxima, závisí na parametrech N_0 a ε , [14].

Na druhou stranu můžeme předpokládat, že jsou na počátku pravděpodobnosti P_n rozdělené

3.8 Numerické řešení řídicí rovnice

podle poissonovského rozdělení

$$F_n(\tau = 0) = \frac{N_0^n}{n!} e^{-N_0}. \quad (3.48)$$

V tomto případě začínají faktoriální momenty v $F_n(\tau = 0) = 1$ a klesnou o faktor 2 než dosáhnou své rovnovážné hodnoty.

3.8.2 Časový vývoj faktoriálních momentů

Necháme rozdělení multiplicity vyvíjet v čase podle řídicí rovnice.

Normovaný druhý faktoriální moment je dán vztahem

$$F_2(\tau) = \langle N(N-1) \rangle / \langle N \rangle^2, \quad (3.49)$$

normovaný třetí faktoriální moment má tvar

$$F_3(\tau) = \langle N(N-1)(N-2) \rangle / \langle N \rangle^3 \quad (3.50)$$

a normovaný čtvrtý faktoriální moment je potom

$$F_4(\tau) = \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle / \langle N \rangle^4. \quad (3.51)$$

Výsledky pro binomické a poissonovské počátení podmínky pro různé hodnoty parametrů N_0 a ϵ jsou v kapitole 3.8.3.

3.8.3 Výsledky

Nejdříve se podíváme na případ termalizace, kde se teplota nebude měnit a tudíž rozdělení hybností a ustředněné účinné průřezy zůstávají konstantní.

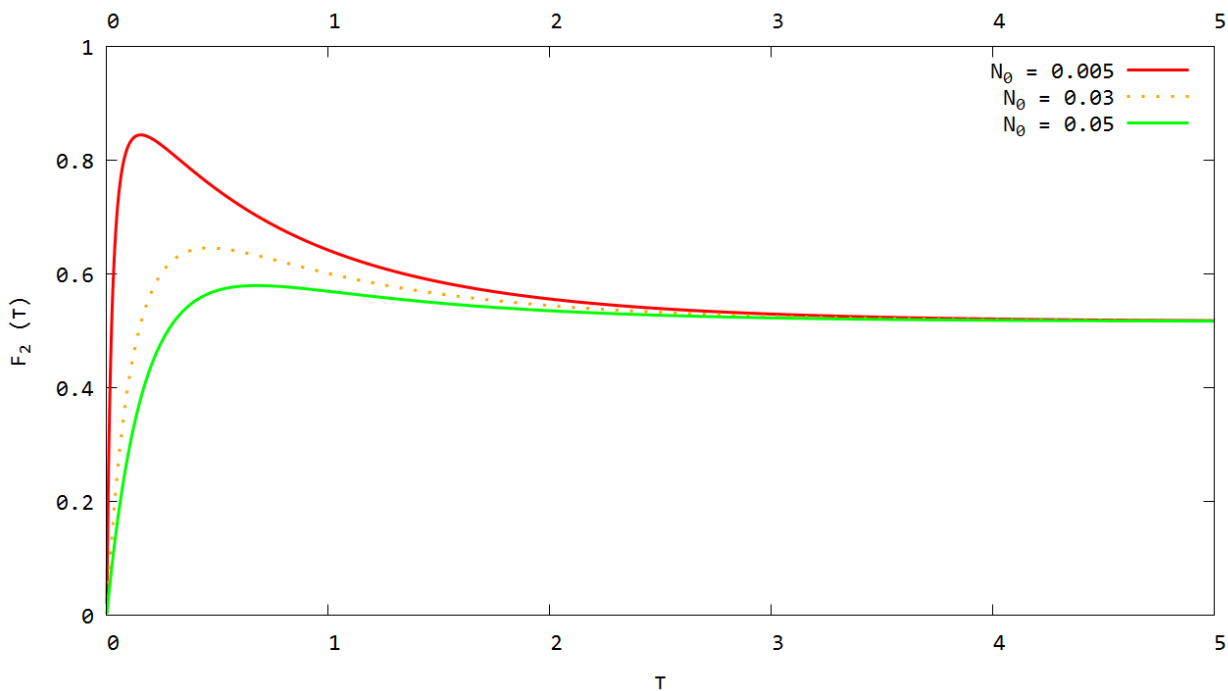
Na Obr. 3.1 vidíme 2. faktoriální moment pro různé hodnoty průměrného počtu částic N_0 pro binomické počáteční podmínky. Vidíme, že pro větší průměrný počet částic N_0 dostaneme menší hodnotu F_2^{max} .

3 ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

Rovnice(3.22) byla řešena s binomickými počátečními podmínkami (Obr. 3.1, Obr. 3.2, Obr. 3.4) a s poissonovskými počátečními podmínkami (Obr. 3.3).

Z těchto obrázků je vidět, že se všechny faktoriální momenty v případě konstantní teploty blíží k jejich rovnovážné hodnotě stejně rychle. Faktoriální momenty se však pro binomické počáteční podmínky odlišují jejich maximálními dosaženými hodnotami. Se zvyšujícím se řádem momentu rozdělení multiplicity se snižuje hodnota tohoto momentu. Pro poissonovské počáteční podmínky (Obr. 3.3) je maximální hodnota všech momentů rovna 1.

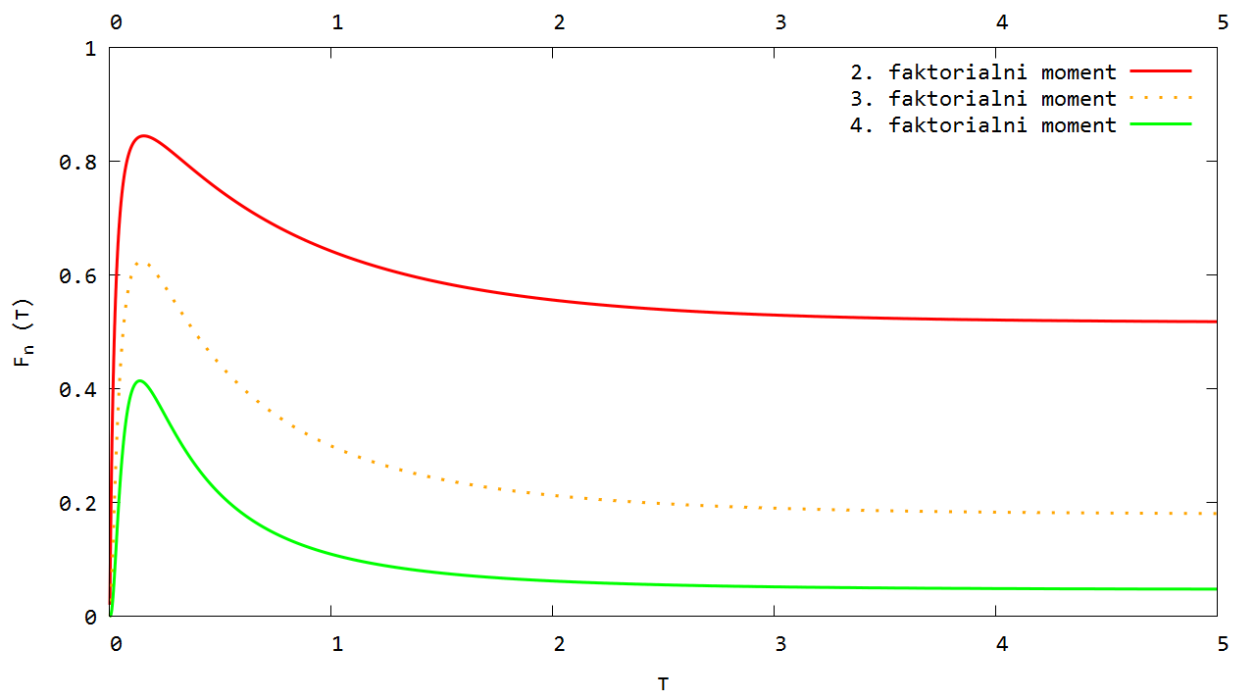
Na Obr. 3.4 vidíme časový vývoj 2., 3. a 4. faktoriálního momentu, které jsou předělené jejich rovnovážnými hodnotami odvozenými v kapitole 3.7 a tudíž všechny tyto momenty konvergují k 1.



Obrázek 3.1: Časový vývoj druhého faktoriálního momentu pro binomické počáteční podmínky. Druhý faktoriální moment je ukázán pro různé hodnoty průměrného počtu částic N_0 pro $\varepsilon = 0.1$.

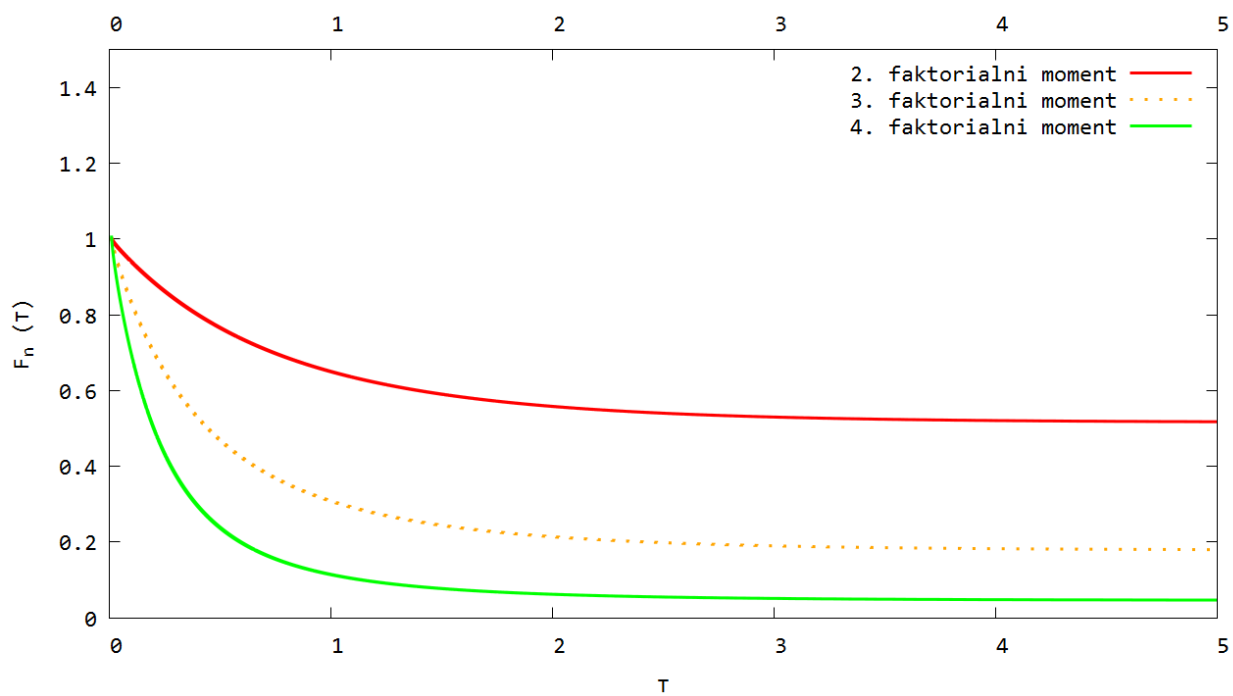
Za použití řídicí rovnice nezávislé na teplotě jsem tedy zjistila, že při zvyšujícím se řádu momentu rozdělení multiplicity nenarůstá doba, za kterou tento moment dosáhne svého rov-

3.8 Numerické řešení řídicí rovnice



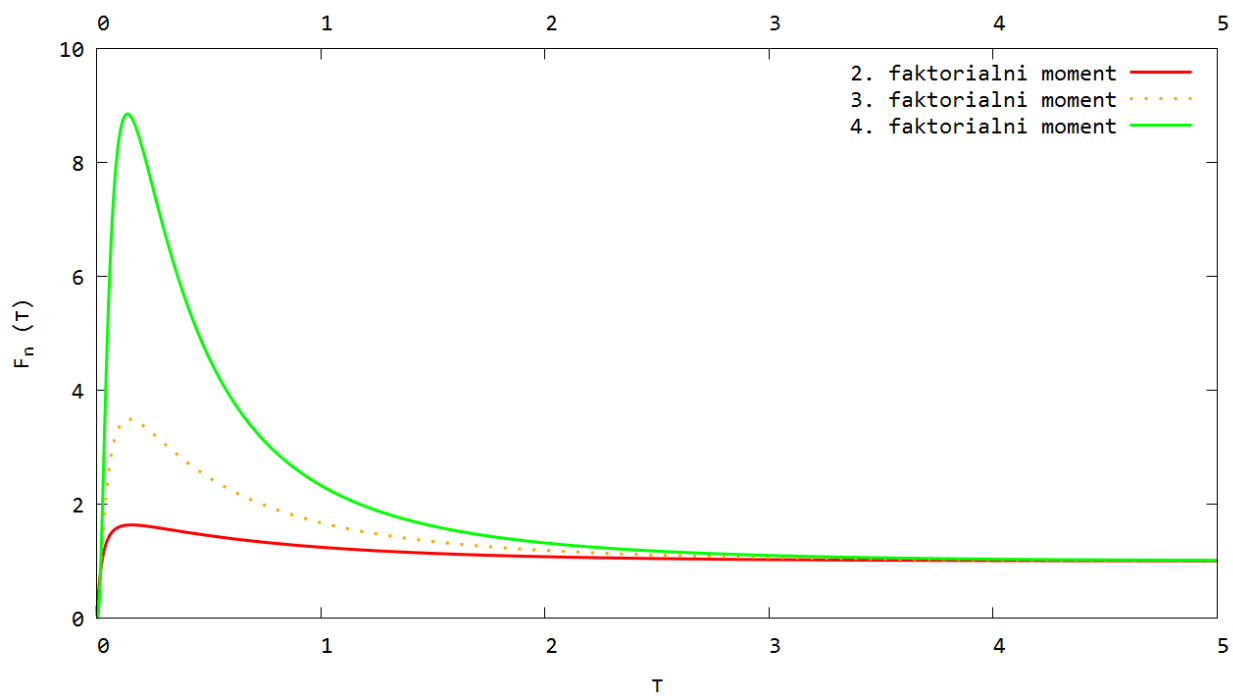
Obrázek 3.2: Druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment pro binomické počáteční podmínky pro $\varepsilon = 0.1$ a $N_0 = 0.005$.

novážného stavu.



Obrázek 3.3: Druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment pro poissonovské počáteční podmínky pro $\varepsilon = 0.1$ a $N_0 = 0.000009$.

3.8 Numerické řešení řídicí rovnice



Obrázek 3.4: Časový vývoj druhého, třetího a čtvrtého faktoriálního momentu, které jsou předělené jejich rovnovážnými hodnotami odvozenými v kapitole 3.7.

4 Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase

4.1 Motivace

Na obrázcích Obr. 3.2, Obr. 3.3 a Obr. 3.4 v kapitole 3.8.3 jsme viděli, že časový vývoj faktoriálních momentů vypadá pro všechny tři momenty velice podobně. Pro další studium faktoriálních momentů chceme do řídicí rovnice přidat závislost na teplotě a reálném čase. V případě, že se teplota nemění, je možné řídicí rovnici formulovat v bezrozměrném čase, který vznikne tak, že se čas přeškáluje relaxačním časem. To jde v případě, že se relaxační čas nemění. Ale mění-li se teplota, bude se také měnit i relaxační čas a tudíž se dříve použitá základní časová škála mění a nemůžeme zavést bezrozměrný čas. Také to znamená, že budeme muset vývoj počítat pro konkrétní chemickou reakci s konkrétními účinnými průřezy. Budeme se chtít podívat na to, co se stane s faktoriálními momenty, když teplota najednou klesne nebo se bude měnit postupně. Chceme se podívat, zda-li se při změně teploty ukážou nějaké rozdíly mezi různými momentami. Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase lépe odpovídá reálné situaci, ve které se teplota fireballu snižuje.

4.2 Chemické složení a reakce

Pro potřeby průměrování přes relativní rychlosti budeme předpokládat, že jsou hybnosti rozděleny podle Boltzmannova rozdělení

$$n_i(p) \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{m_i^2 + p^2}}{T}\right), \quad (4.1)$$

kde p je hybnost, m_i je hmotnost částice i a T je teplota.

Tím vytvoříme předpoklad tepelné rovnováhy, ale chemicky budeme systém považovat v nerovnovážném stavu.

Relativní rychlost je dána vztahem

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE

$$v_{ij} = [(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2]^{1/2} / E_i E_j, \quad (4.2)$$

kde E_i a E_j jsou energie dvou částic.

Střední hodnota součinu účinného průřezu σ_{ij}^X a relativní rychlosti v_{ij} je definována jako

$$\langle \sigma_{ij}^X v_{ij} \rangle = \int d^3 p_i \int d^3 p_j n_i(p_i) n_j(p_j) \sigma_{ij}^X v_{ij}, \quad (4.3)$$

kde $n_k(p_k)$ jsou rozdělení hybnosti částic.

Po vyintegrování rovnice (4.3) získáme požadovaný vztah pro střední hodnotu součinu účinného průřezu a relativní rychlosti ve tvaru

$$\langle v_{ij} \sigma_{ij}^X \rangle = \frac{\int_{\sqrt{s_0}}^{\infty} dx \sigma_{ij}^X(x) K_1\left(\frac{x}{T}\right) [x^2 - (m_i + m_j)^2] [x^2 - (m_i - m_j)^2]}{4m_i^2 m_j^2 T K_2(m_i/T) K_2(m_j/T)}, \quad (4.4)$$

kde K_i jsou modifikované Besselovy funkce definované vztahy

$$K_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh(t) dt, \quad (4.5)$$

$$K_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh(2t) dt, \quad (4.6)$$

kde $z = x/T$.

Dále

$$\sqrt{s_0} = \max(m_i + m_j, \Sigma_{final} m_a) \quad (4.7)$$

je prahová energie reakce.

Vztahy v kapitole 4.2 byly převzaty z [15] a [16].

4.3 Účinné průřezy pro produkci kaonů

V následujících kapitolách specifikujeme účinné průřezy pro reakci s produkcí podivnosti, které jsou relevantní pro uvažované energie srážky. Budeme zanedbávat možnou změnu

4.4 Řídící rovnice závislá na teplotě

účinného průřezu v husté a horké hmotě a budeme uvažovat jeho vakuovou formu. Tato aproximace splňuje náš předpoklad, že se vlastnosti všech částic v médiu nemění.

Pro procesy s dvěma částicemi v konečném stavu musíme do výpočtu zahrnout i inverzní reakce.

Účinný průřez pro inverzní reakce vychází z předpokladů fázového prostoru jako

$$\sigma_{34 \rightarrow 12}(\sqrt{s}) = \frac{(2J_3 + 1)(2J_4 + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} \frac{p_{cm}^2(s, m_1, m_2)}{p_{cm}^2(s, m_3, m_4)} \times \sigma_{12 \rightarrow 34}(\sqrt{s}) \quad (4.8)$$

kde J_i a m_i jsou spiny a hmotnosti částic, které se účastní reakce, $\sigma_{12}^{34}(\sqrt{s})$ je účinný průřez pro reakci $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$ a p_{cm} je hybnost v soustavě hmotného středu definovaná jako

$$p_{cm}^2(s, m_1, m_2) = \frac{[s - (m_1^2 + m_2^2)]^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4s}. \quad (4.9)$$

Vztahy v kapitole 4.3 byly převzány z [16].

4.4 Řídící rovnice závislá na teplotě

Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt}(t) = & \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \\ & - \frac{L}{V} [n^2 P_n(t) - (n+1)^2 P_{n+1}(t)], \end{aligned} \quad (4.10)$$

kde G je "kreační člen" definovaný vztahem $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$ a L je "anihilační člen" definovaný vztahem $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$. Tyto střední hodnoty dostaneme ze vztahu (4.4).

V rovnici (4.10) je V přesný objem reakce, $\langle N_{a_1} \rangle$ a $\langle N_{a_2} \rangle$ jsou průměrné počty částic pro reakci $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$.

Rovnici (4.10) dostaneme upravením řídicí rovnice (3.22), která je závislá pouze na bezrozměrném čase τ . Nejprve dosadíme v rovnici (3.22) za ϵ vztah 3.13, čímž dostaneme

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\tau}(\tau) &= G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L [P_{n-1}(\tau) - P_n(\tau)] \\ &\quad - [n^2 P_n(\tau) - (n+1)^2 P_{n+1}(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rovnici (4.11) nyní přenásobíme L/V a dosadíme $d\tau = dt \frac{L}{V}$ (ze vztahu (3.23)). Tedy

$$\begin{aligned} \frac{L}{V} \frac{dP_n}{dt} \left(t \frac{L}{V}\right) \frac{V}{L} &= \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle \left[P_{n-1} \left(t \frac{L}{V}\right) - P_n \left(t \frac{L}{V}\right) \right] \\ &\quad - \frac{L}{V} \left[n^2 P_n \left(t \frac{L}{V}\right) - (n+1)^2 P_{n+1} \left(t \frac{L}{V}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Po přeškálování $\tau = t \frac{L}{V}$ a přejmenování $\tau = t$ dostaneme rovnici (4.10).

4.5 Reakce $\pi N \rightarrow K \Lambda$

Řídící rovnici závislou na teplotě budeme demonstrovat pro rovnici

$$\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0. \quad (4.13)$$

Pro hmotnosti platí

$$m_{\pi^+} = 139.570 \text{ MeV}, \quad (4.14)$$

$$m_n = 939.565 \text{ MeV}, \quad (4.15)$$

$$m_{\Lambda^0} = 1115.683 \text{ MeV}, \quad (4.16)$$

$$m_{K^+} = 493.677 \text{ MeV}, \quad (4.17)$$

$$d_{\pi^+} = 0, \quad (4.18)$$

$$d_n = 2, \quad (4.19)$$

$$d_{\Lambda^0} = 2, \quad (4.20)$$

4.5 Reakce $\pi N \rightarrow K\Lambda$

$$d_{K^+} = 0. \quad (4.21)$$

Hodnoty hmotností a spinů byly převzány z [19].

Objem reakce uvažujeme $V = 125 \text{ fm}^3$.

Prahovou energii reakce získáme z rovnice (4.7)

$$\begin{aligned} \sqrt{s_0} &= \max(m_{\pi^+} + m_n, m_{\Lambda^0} + m_{K^+}) \\ &= \max(1079.135 \text{ MeV}, 1609.36 \text{ MeV}) \simeq 1.61 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Účinný průřez pro reakci (4.13) je

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,054 \cdot (s^{1/2} - 1,61)}{0,091} \text{ fm}^2, \quad 1,7 \geq s^{1/2} \geq 1,61 \text{ GeV}, \quad (4.23)$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,0045}{s^{1/2} - 1,6} \text{ fm}^2, \quad s^{1/2} \geq 1,7 \text{ GeV}, \quad (4.24)$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = 0 \text{ fm}^2, \quad s^{1/2} \leq 1,61 \text{ GeV}. \quad (4.25)$$

Účinný průřez pro inverzní reakci získáme z rovnice (4.8).

4.6 Výsledky

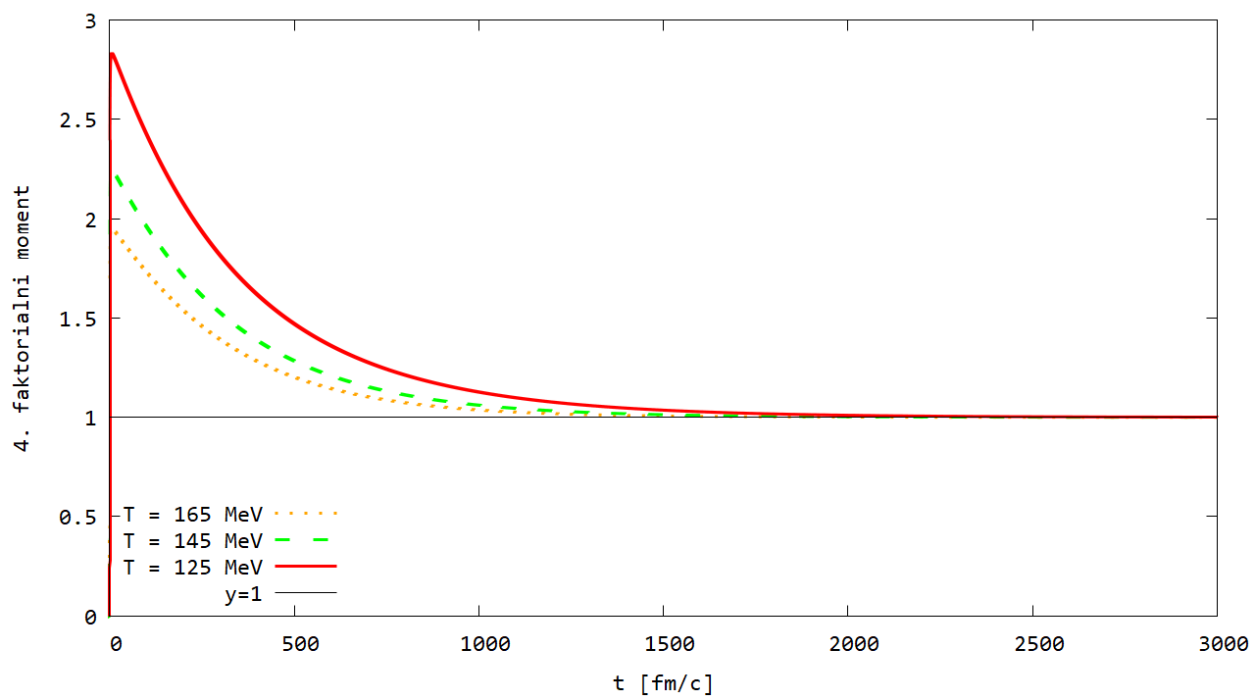
4.6.1 Konstantní teplota

Nejprve ukážeme, jak vypadají faktoriální momenty pro řídicí rovnici závislou na konstantní teplotě T předělené svou rovnovážnou hodnotou, abychom mohli posoudit, jak rychle termalizují.

Na Obr. 4.1 je 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty $T = 165$ MeV, $T = 145$ MeV a $T = 125$ MeV. Čtvrtý faktoriální moment jsem vykreslila proto, že jsou na něm nejvíce patrné veškeré změny (viz. Obr.3.4). Z tohoto grafu je vidět, že čas termalizace pro 4. faktoriální moment je okolo 2000–2500 fm/c. Z experimentů ovšem víme, že čas termalizace kvark-gluonového plazmatu by měl být okolo 10 fm/c. Tento rozdíl je způsoben tím, že v této práci uvažujeme pouze jednu reakci $\pi N \rightarrow K\Lambda$, avšak v reálném případě probíhá při vývoji plazmatu nespočetněkrát více reakcí. Dále tedy budeme používat účinný průřez definovaný v kapitole 4.5 různě přeškálovaný, abychom získali více reálné závislosti. 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty $T = 165$ MeV, $T = 145$ MeV a $T = 125$ MeV s 200krát větším účinným průřezem je na Obr. 4.2. Z tohoto grafu vidíme, že pro 200krát větší účinný průřez je doba termalizace okolo 10 fm/c.

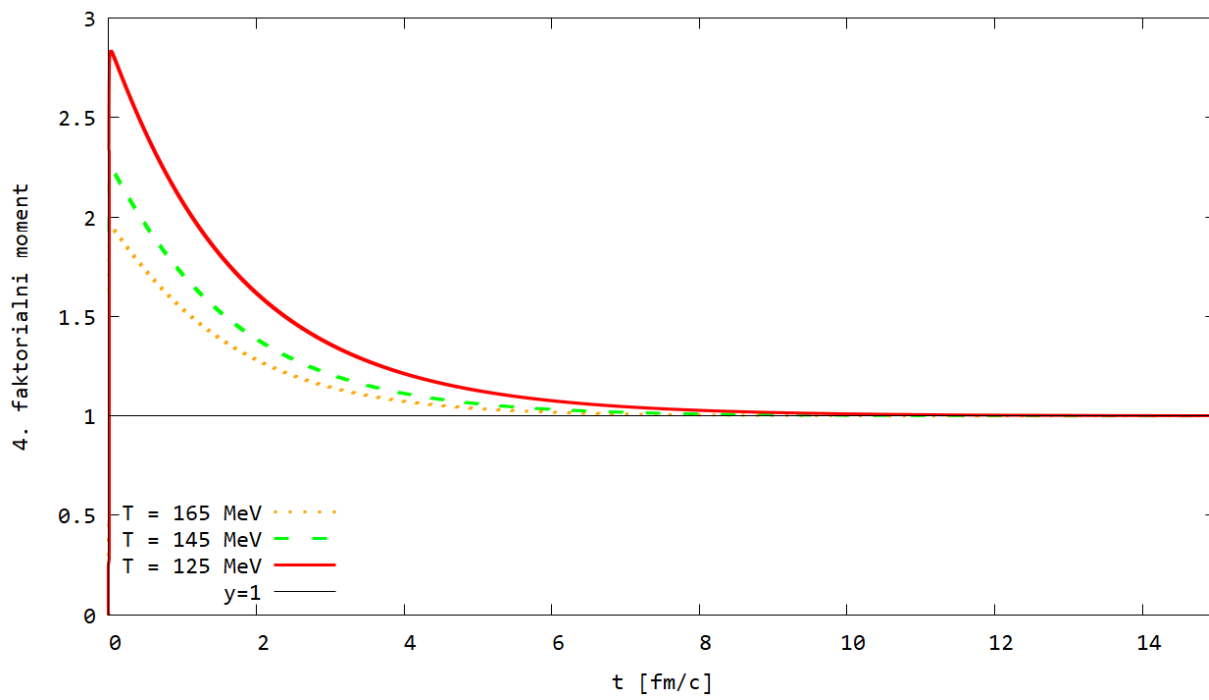
Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s $N_0 = 0.0005$.

4.6 Výsledky



Obrázek 4.1: 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty $T = 165$ MeV, $T = 145$ MeV a $T = 125$ MeV pro 15 pionů a 10 neutronů.

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE



Obrázek 4.2: 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty $T = 165$ MeV, $T = 145$ MeV a $T = 125$ MeV s 200krát větším účinným průřezem pro 15 pionů a 10 neutronů.

4.6 Výsledky

4.6.2 Náhlá změna teploty

Doposud jsme začínali s “umělými” počátečními podmínkami. Přírozenější situaci dostaneme v případě, že je systém v rovnováze a musí reagovat na nějakou změnu. To vyzkoušíme na nejjednodušším případě náhlé skokové změny teploty.

Systém necháme vyvíjet v čase podle řídicí rovnice závislé na teplotě a reálném čase s počáteční teplotou

$$T_1 = 0.165 \text{ GeV} \quad (4.26)$$

až do chvíle úplné termalizace faktoriálních momentů.

Potom náhle snížíme teplotu na

$$T_2 = 0.125 \text{ GeV} \quad (4.27)$$

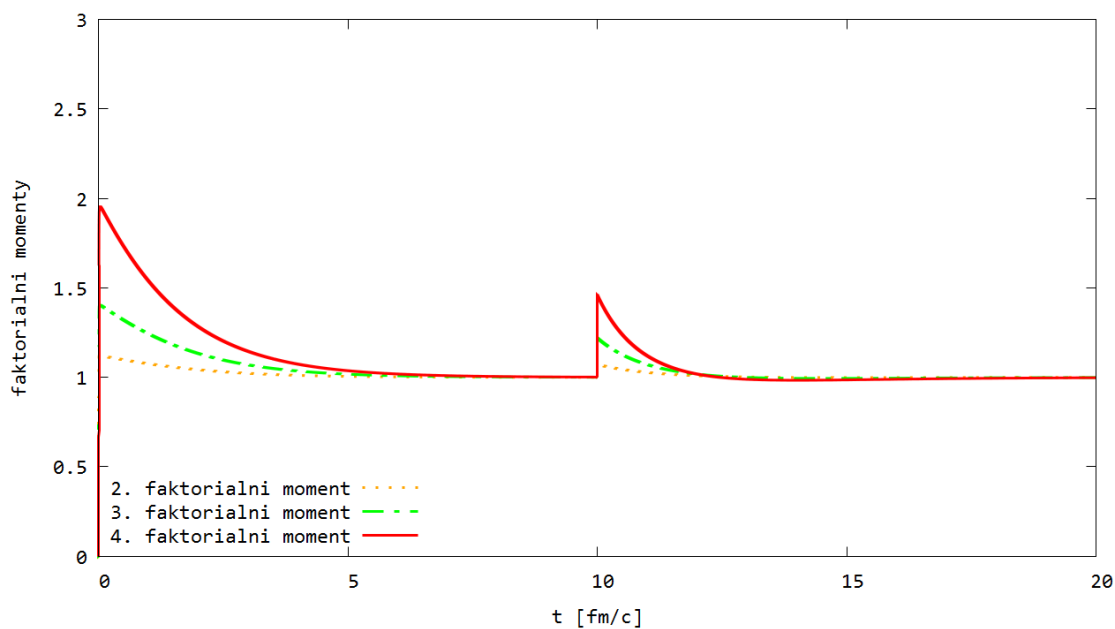
a budeme sledovat, jak na tuto změnu budou faktoriální momenty reagovat.

Výsledky jsou na obrázcích Obr. 4.3 pro 200krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.4 pro 100krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.5 pro 400krát zvětšený účinný průřez a Obr. 4.6 pro 30krát zvětšený účinný průřez pro 15 pionů a 10 neutronů v objemu 125fm^3 .

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s $N_0 = 0.0005$.

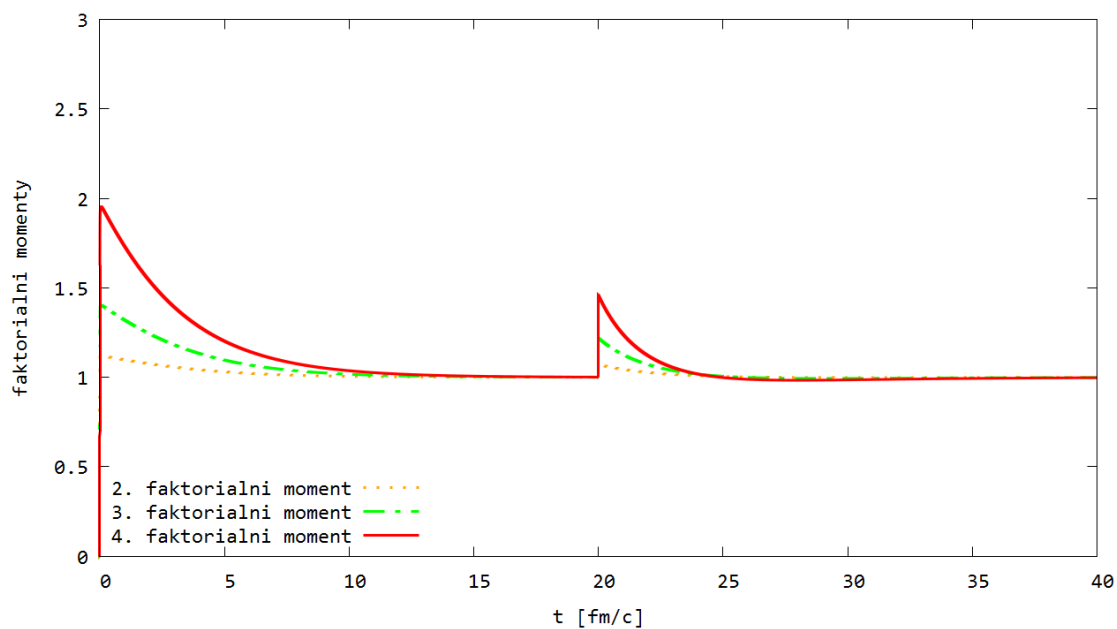
Z obrázků Obr. 4.3, Obr. 4.4, Obr. 4.5 a Obr. 4.6 časového vývoje řídicí rovnice závislé na teplotě a reálném čase vidíme, že v nerovnovázném stavu (po snížení teploty) se vyšší faktoriální momenty více liší od svých rovnovážných hodnot než momenty nižší.

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE



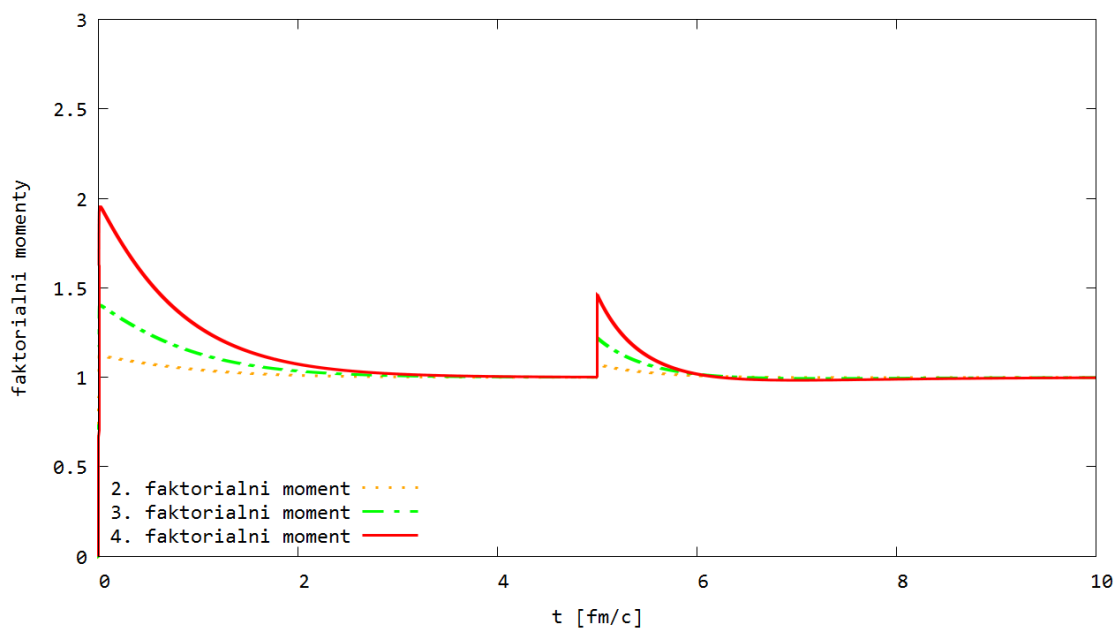
Obrázek 4.3: Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 10 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

4.6 Výsledky



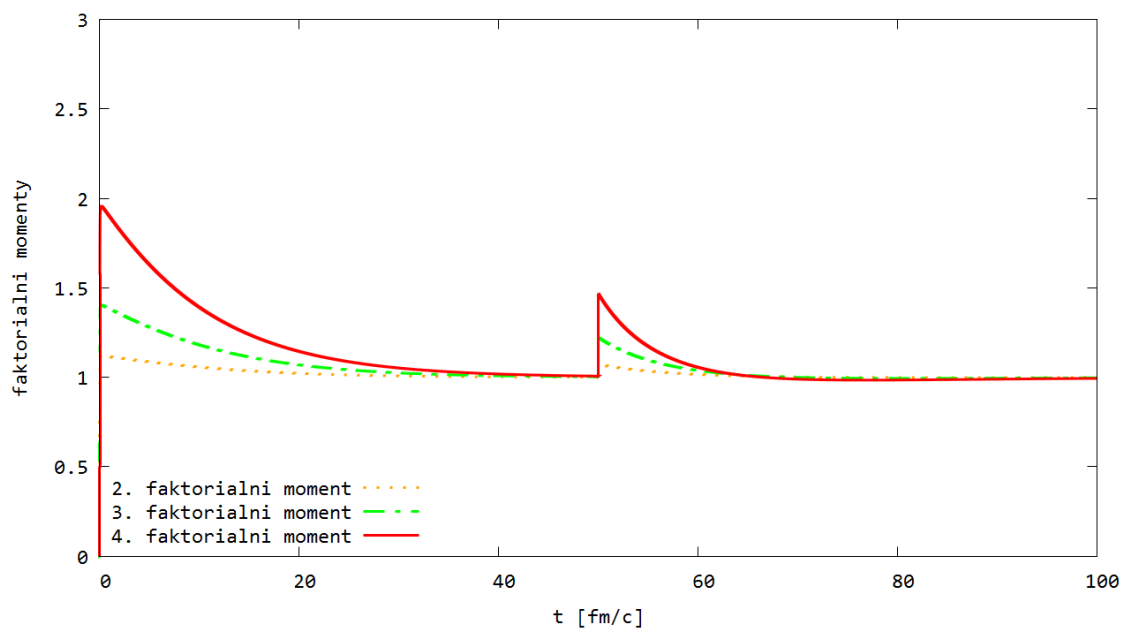
Obrázek 4.4: Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 20 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE



Obrázek 4.5: Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 5 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

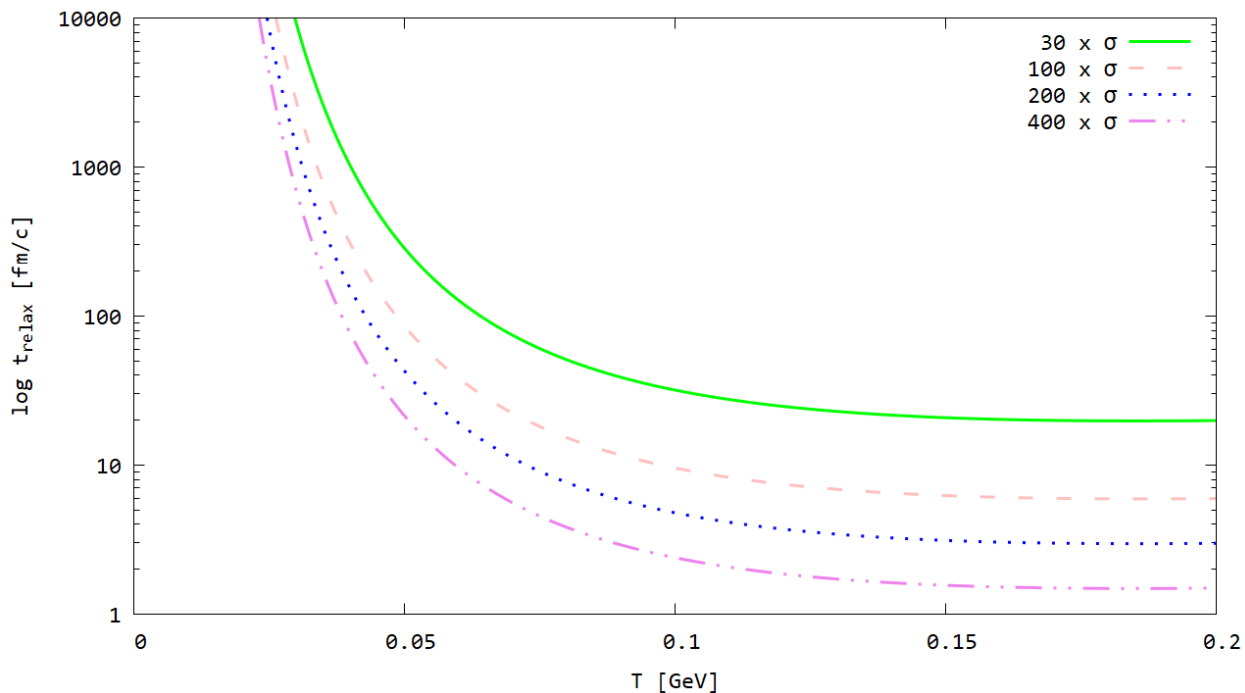
4.6 Výsledky



Obrázek 4.6: Faktoriální momenty předělené svou rovnovážnou hodnotou pro skok teploty ze 165 MeV na 125 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 50 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

4.6.3 Postupná změna teploty

Nejprve se podíváme na závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na teplotě. Tato závislost je pro různé násobky účinného průřezu σ na Obr. 4.7.



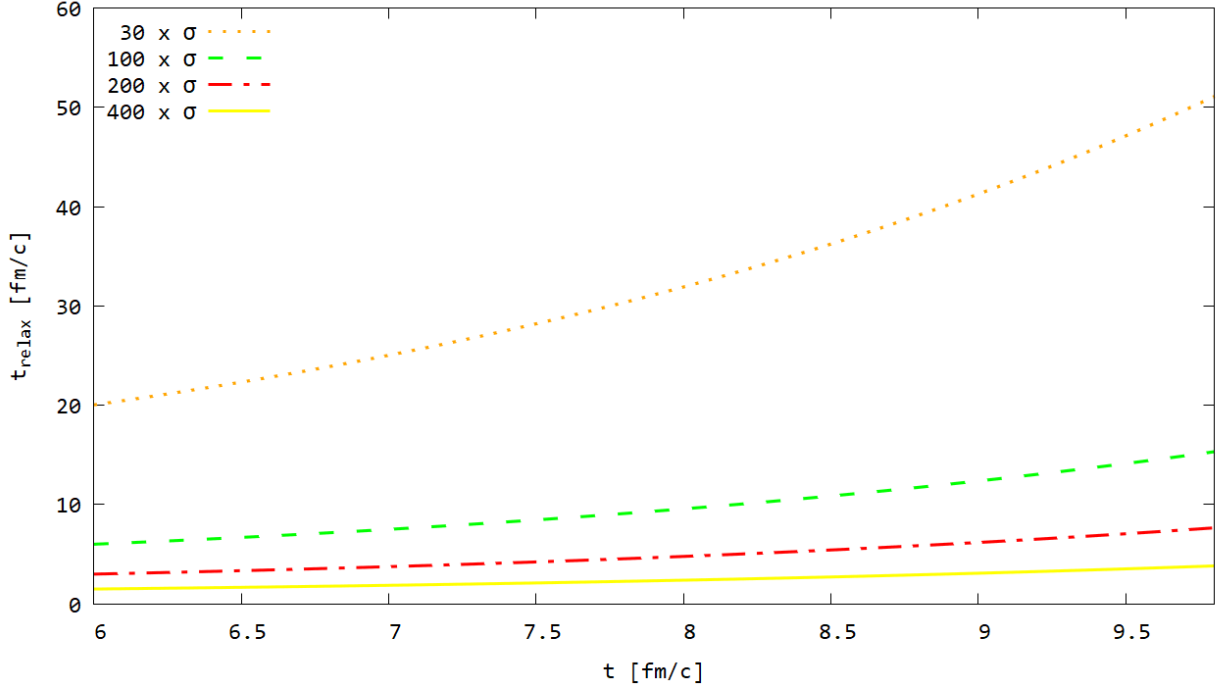
Obrázek 4.7: Závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na teplotě pro různé násobky účinného průřezu σ , pro 15 pionů a 10 neutronů.

Nejjednodušší model časového vývoje fireballu je Bjorkenův model [21], ve kterém se fireball rozpíná v podélném směru. Podélná boost-invariantní expanze vypadá stejně ve všech vztažných soustavách s jakoukoli podélnou rychlostí. V tomto modelu je teplota nepřímo úměrná podélnému času. Předpokládáme-li takovouto časovou závislost teploty, můžeme z ní určit, jak se s časem bude měnit parametr, který určuje rychlost chemických reakcí. Tento parametr se nazývá relaxační čas.

Dále se tedy podíváme na závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na normálním čase a na závislost teploty na normálním čase. Tyto závislosti pro různé násobky účinného průřezu σ jsou na Obr. 4.8 a na Obr. 4.9. Z obrázku Obr. 4.8 vidíme, že nejvíce

4.6 Výsledky

se relaxační čas vůči normálnímu času mění pro 30krát zvětšený účinný průřez. Naopak z obrázku Obr. 4.9 vidíme, že závislost teploty T na normálním čase vůbec nezávisí na tom, kolikrát jsme účinný průřez zvětšili.



Obrázek 4.8: Závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na normálním čase pro různé násobky účinného průřezu, pro 15 pionů a 10 neutronů.

Nyní necháme teplotu po úplné termalizaci faktoriálních momentů klesat podle Bjorkenova modelu z počáteční teploty $T_0 = 0.165$ GeV podle vztahu

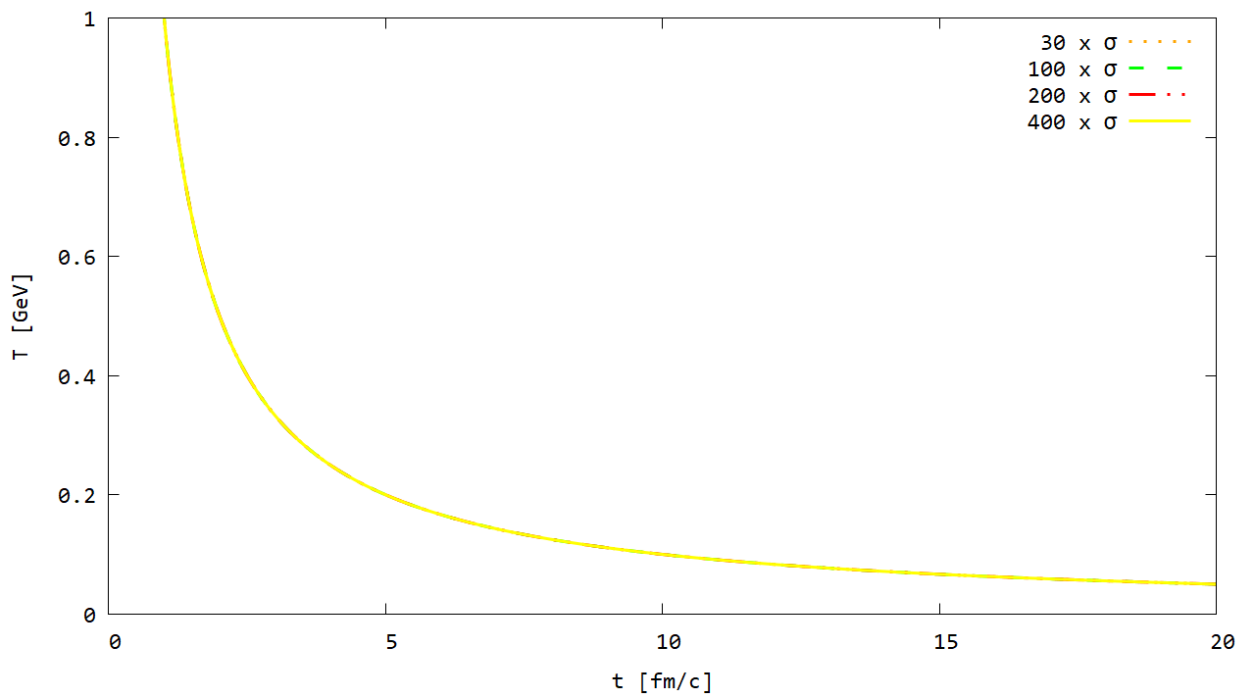
$$T = T_0 \frac{t_0}{t} \quad (4.28)$$

až na teplotu $T = 0.100$ GeV.

Čas t_0 je čas hadronizace pro teplotu $T = 0.165$ GeV. Z Bjorkenovy závislosti teploty na čase je $t_0 = 6$ fm/c.

Pro všechny násobky účinného průřezu jsou hodnoty termalizačního času $t_{thermal}$ (čas potřebný k tomu, aby faktoriální moment dosáhl své rovnovážné hodnoty) pro teplotu 0.165 GeV

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE



Obrázek 4.9: Závislost teploty T na normálním čase pro různé násobky účinného průřezu, pro 15 pionů a 10 neutronů.

shrnuty v tabulce 4.1.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t_{thermal}$ [fm/c]	50	20	10	5

Tabulka 4.1: Hodnoty termalizačního času $t_{thermal}$ pro různé násobky účinného průřezu.

Relaxační čas zavedený v kapitole 3 je vlastnost systému. Kdybychom systém vychýlili z rovnováhy, po nějaké době se do ní vrátí. Relaxační čas je měřítkem toho, jak rychle to relaxuje.

Pro všechny násobky účinného průřezu jsou hodnoty relaxačního času t_{relax} pro teplotu 0.165 GeV shrnuty v tabulce 4.2.

Zároveň s teplotou se mění i objem systému podle vztahu

$$V = V_0 \frac{t}{t_0}, \quad (4.29)$$

4.6 Výsledky

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
t_{relax} [fm/c]	20.05	6.01	3.01	1.50

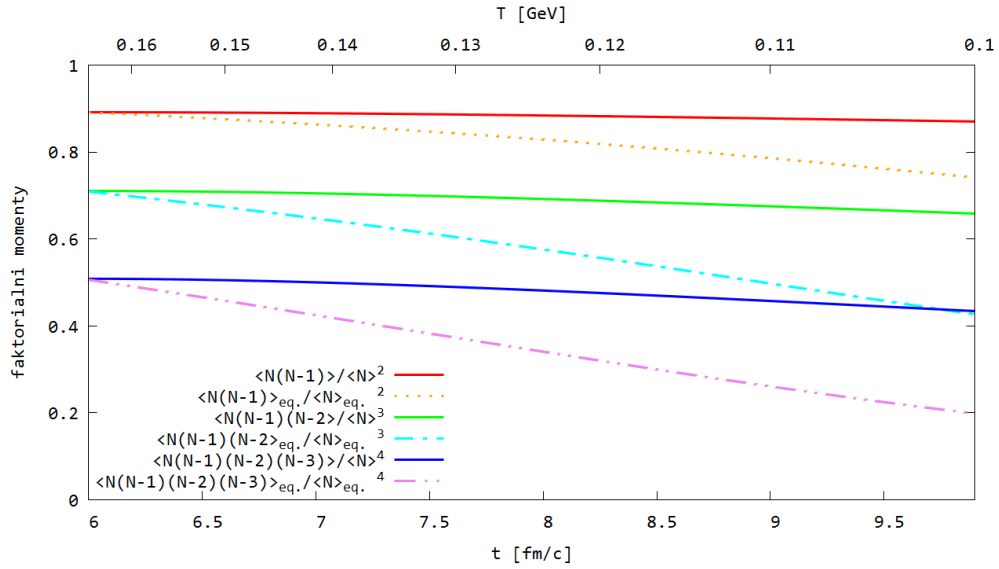
Tabulka 4.2: Hodnoty relaxačního času t_{relax} pro různé násobky účinného průřezu.

kde $V_0 = 125 \text{ fm}^3$.

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s $N_0 = 0.005$.

Výsledky jsou na obrázcích Obr. 4.12 pro 200krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.11 pro 100krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.13 pro 400krát zvětšený účinný průřez a Obr. 4.10 pro 30krát zvětšený účinný průřez pro 15 pionů a 10 neutronů.

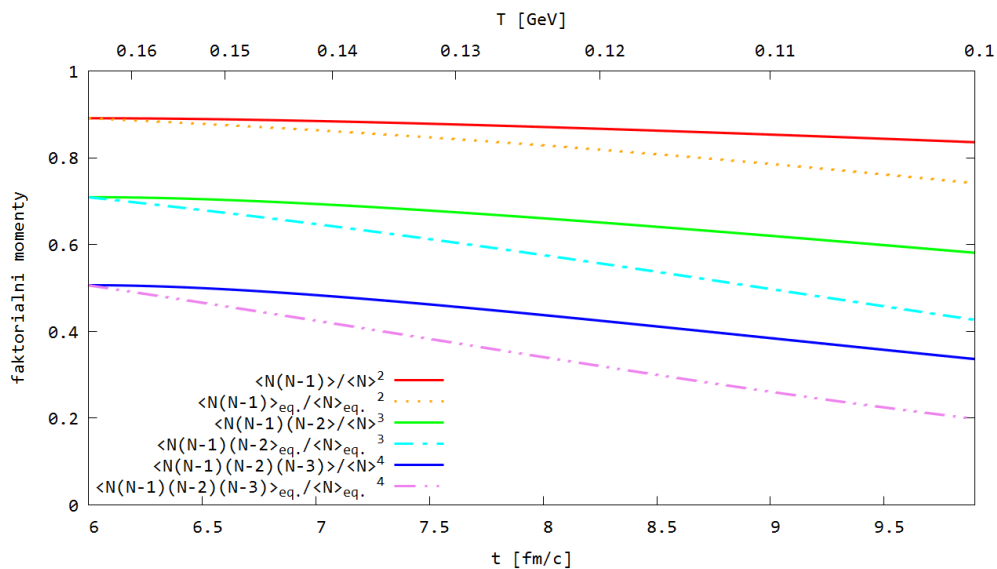
Pro porovnání ukážeme, jak by vypadaly hodnoty faktoriálních momentů v rovnováze (čerchovaná čára) a mimo rovnovážnou polohu (plná čára). Na obrázcích níže tedy vidíme odlišnost rovnovážné křivky od nerovnovážné křivky. Rozdíl je vidět především pro menší účinné průřezy.



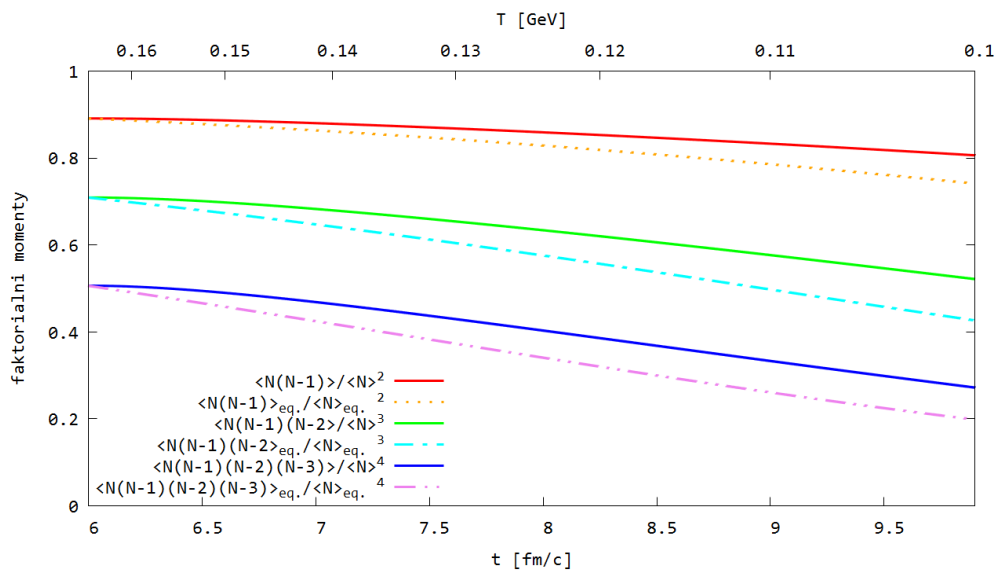
Obrázek 4.10: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 50 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

Z Obr. 4.12 pro 200krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.11 pro 100krát zvětšený účinný

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE

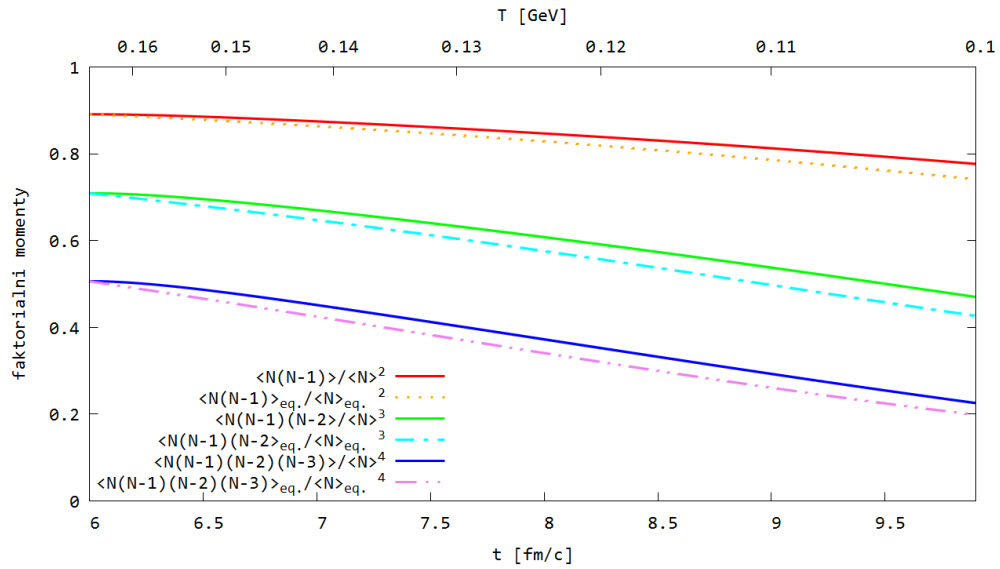


Obrázek 4.11: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 20 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 4.12: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 10 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

4.6 Výsledky



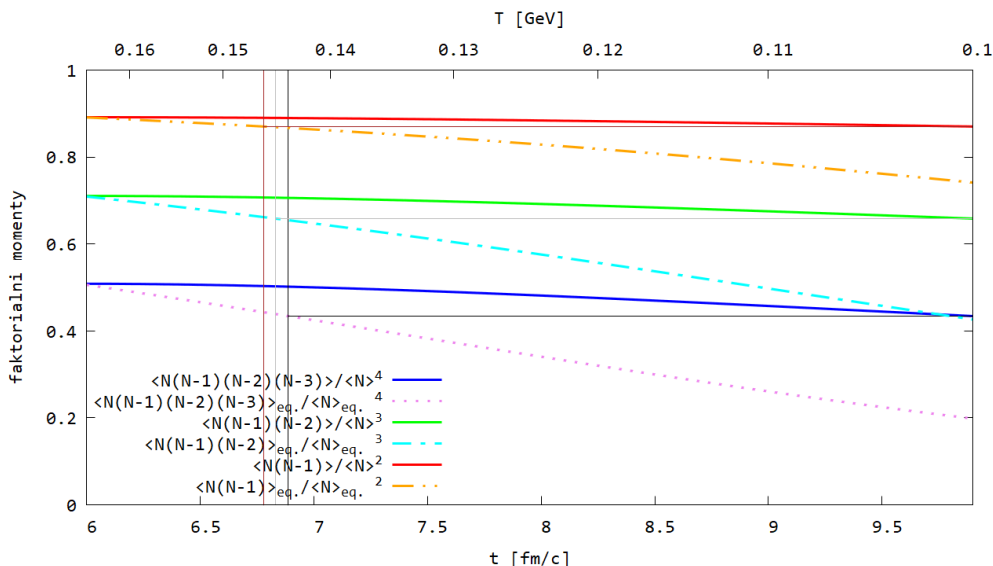
Obrázek 4.13: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 5 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

průřez, Obr. 4.13 pro 400krát zvětšený účinný průřez a Obr. 4.10 pro 30krát zvětšený účinný průřez vidíme, že vyšší momenty se více odlišují od svých rovnovážných hodnot.

4.6.4 Teplota vymrznutí

Z obrázků Obr. 4.10, Obr. 4.11, Obr. 4.12 a Obr. 4.13 lze zpětně určit zdánlivou teplotu vymrznutí jednotlivých faktoriálních momentů pro různé násobky účinného průřezu. Předpokládejme, že pozorujeme konečné hodnoty faktoriálních momentů. Myslíme si ale, že systém je pořád termalizovaný a budeme se tedy ptát, při jaké teplotě by termalizovaný systém vedl k dané hodnotě faktoriálního momentu v rovnovážném stavu. Tuto teplotu získáme tak, že v čase $t = 10 \text{ fm}/c$ provedeme kolmici k ose y z bodu, kde daný faktoriální moment osu y protíná až do bodu, kde tato kolmice narazí na rovnovážnou křivku daného faktoriálního momentu. Pomocí kolmice k ose x v tomto bodě získáme zdánlivou teplotu vymrznutí daného faktoriálního momentu.

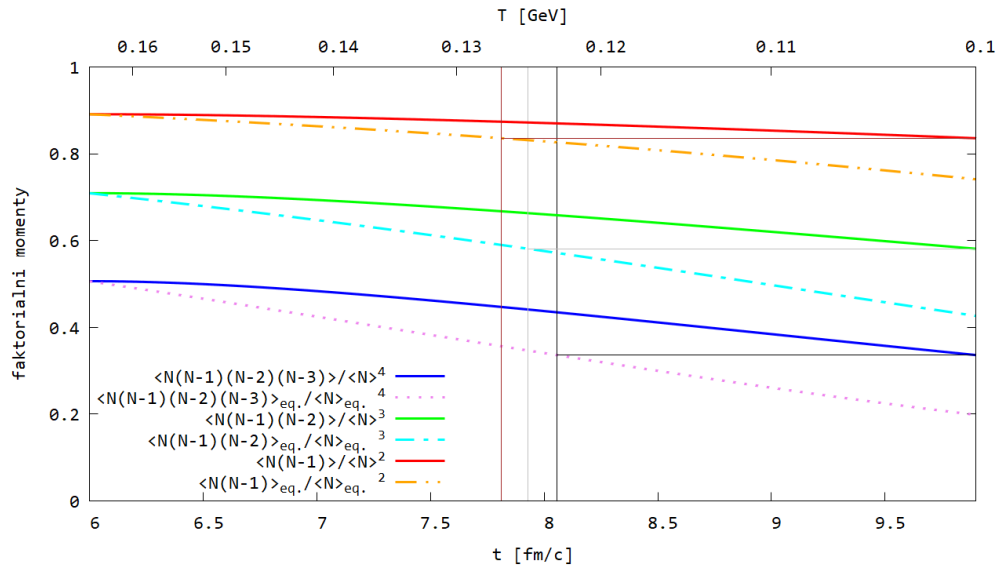
Výsledky jsou na obrázkách Obr. 4.14, Obr. 4.15, Obr. 4.16, Obr. 4.17 a v tabulkách B.1, B.2, B.3, B.4 viz. příloha B.



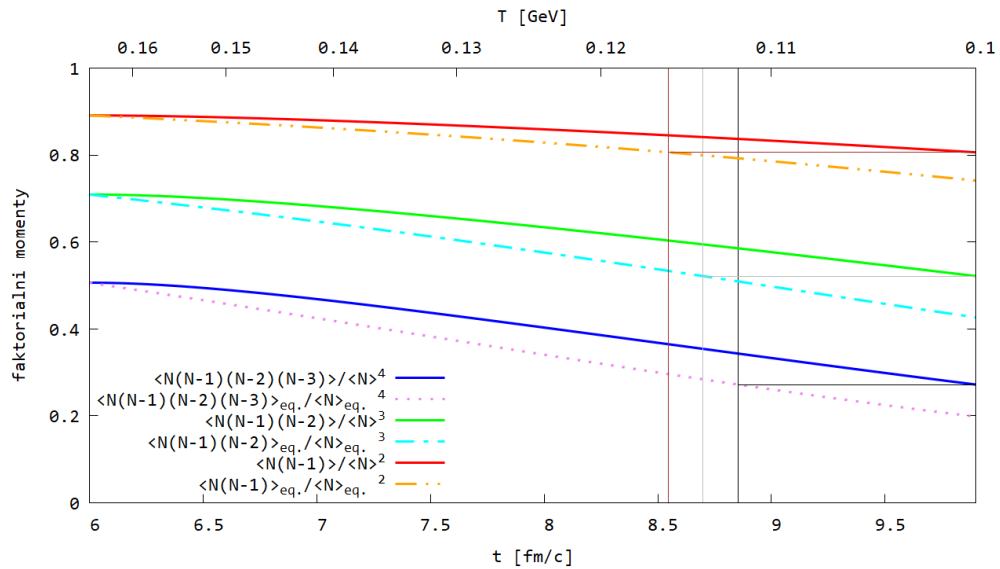
Obrázek 4.14: Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 50 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

Z obrázků Obr. 4.14, Obr. 4.15, Obr. 4.16, Obr. 4.17 a tabulek B.1, B.2, B.3, B.4 viz. příloha B vidíme, že vyšší momenty vymrzají při nižší teplotě, tedy déle než momenty nižší.

4.6 Výsledky

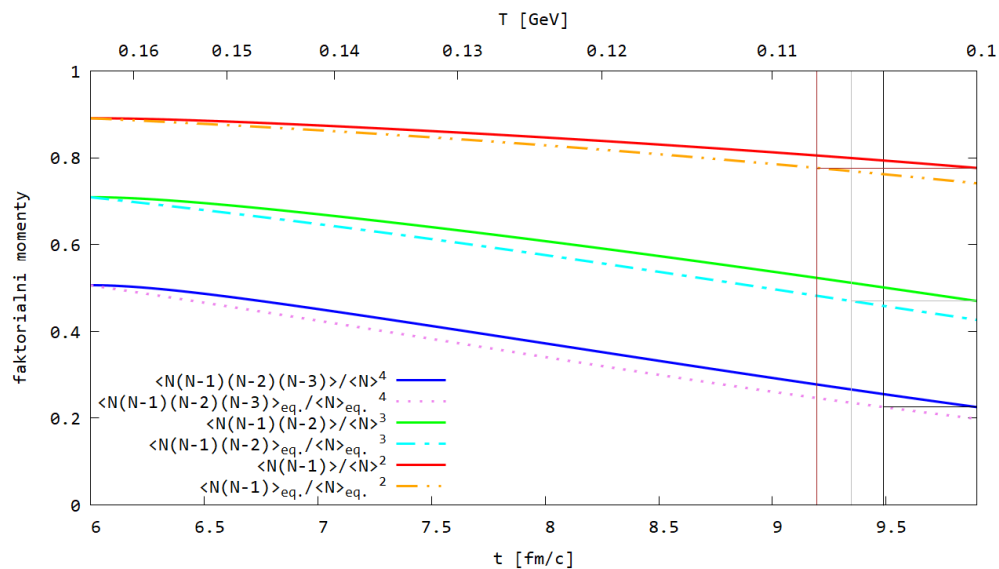


Obrázek 4.15: Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 20 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 4.16: Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 10 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

4 ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLOTĚ A REÁLNÉM ČASE



Obrázek 4.17: Teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez, pro čas termalizace okolo 5 fm/c a pro 15 pionů a 10 neutronů.

Pro větší účinné průřezy se dedukované teploty neliší tolik jako pro menší účinné průřezy. Různé faktoriální momenty vedou k různým hodnotám teploty.

5 Centrální momenty

Při zpracování dat nás místo faktoriálních momentů zajímají momenty centrální, popřípadě jejich kombinace jako je např. koeficient šikmosti a špičatosti.

Podíváme se tedy na odvození rovnovážných hodnot centrálních momentů a na časový vývoj centrálních momentů a jejich kombinací.

5.1 Rovnovážné hodnoty centrálních momentů

Rovnovážná hodnota prvního faktoriálního momentu je definovaná vztahem (3.32) jako

$$\langle N \rangle_{eq.} = \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (5.1)$$

Rovnovážná hodnota druhého faktoriálního momentu je dána vztahem (3.35) jako

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq.} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (5.2)$$

Rozepíšeme-li levou stranu vztahu 5.2, dostaneme

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq.} = \langle N^2 \rangle_{eq.} - \langle N \rangle_{eq.}. \quad (5.3)$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty N^2 tedy vyjádříme pomocí rovnosti vztahů (5.2) a (5.3) a dosazením vztahu (5.1) jako

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_{eq.} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Rovnovážná hodnota třetího faktoriálního momentu je daná vztahem (3.38) jako

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq.} &= \frac{3}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Rozepsáním levé strany vztahu 5.5 dostaneme výraz

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq.} &= \\ \langle (N^2 - N)(N-2) \rangle_{eq.} &= \langle N^3 - 2N^2 - N^2 + 2N \rangle_{eq.} = \\ \langle N^3 - 3N^2 + 2N \rangle_{eq.} &= \langle N^3 \rangle_{eq.} - 3 \langle N^2 \rangle_{eq.} + 2 \langle N \rangle_{eq.}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty N^3 dostaneme tak, že dáme do rovnosti vztahy (5.5) a (5.6) a dosadíme výrazy (5.1) a (5.4)

$$\begin{aligned} \langle N^3 \rangle_{eq.} &= \frac{3}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &+ 3 \langle N^2 \rangle_{eq.} - 2 \langle N \rangle_{eq.} = \frac{3}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &+ \frac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{2} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \\ 2\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} &= \frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rovnovážná hodnota čtvrtého faktoriálního momentu je dána vztahem (3.41) jako

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq.} &= -\frac{15}{8} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &- \frac{3}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.1 Rovnovážné hodnoty centrálních momentů

Rozepíšeme-li levou stranu vztahu 5.8, získáme výraz

$$\begin{aligned}
 \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq.} &= \langle (N^2 - N)(N^2 - 5N + 6) \rangle_{eq.} \\
 &= \langle N^4 - 5N^3 + 6N^2 - N^3 + 5N^2 - 6N \rangle_{eq.} \\
 &= \langle N^4 \rangle_{eq.} - 6 \langle N^3 \rangle_{eq.} + 11 \langle N^2 \rangle_{eq.} - 6 \langle N \rangle_{eq.}. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty N^4 dostaneme z rovnosti vztahů (5.8) a (5.9) a dosazením (5.1), (5.4) a (5.7)

$$\begin{aligned}
 \langle N^4 \rangle_{eq.} &= -\frac{15}{8} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
 &\quad - \frac{3}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
 &\quad + \frac{6}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{18}{4} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{6}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
 &\quad - \frac{11}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{11}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + 6 \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
 &= \frac{1}{8} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{7}{8} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
 &\quad + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Dále platí, že:

1. centrální moment je vždy roven 0.
2. centrální moment (variance) je definován vztahem

$$\begin{aligned}
 \mu_2 = var N &= \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 - 2N \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - 2 \langle N \rangle \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \\
 &= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Směrodatná odchylka σ je definována jako odmocnina z variance (2. centrálního momentu), tedy

$$\sigma = \sqrt{\text{var}N} = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}. \quad (5.12)$$

3. centrální moment je dán vztahem

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle = \langle N^3 - 3N^2 \langle N \rangle + 3N \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle^3 \rangle \\ &= \langle N^3 \rangle - 3 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle + 3 \langle N \rangle \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle^3 = \langle N^3 \rangle - 3 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle + 2 \langle N \rangle^3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

4. centrální moment je definovaný jako

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle = \langle N^4 - 4N^3 \langle N \rangle + 6N^2 \langle N \rangle^2 - 4N \langle N \rangle^3 + \langle N \rangle^4 \rangle \\ &= \langle N^4 \rangle - 4 \langle N^3 \rangle \langle N \rangle + 6 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle^2 - 4 \langle N \rangle \langle N \rangle^3 + \langle N \rangle^4 \\ &= \langle N^4 \rangle - 4 \langle N^3 \rangle \langle N \rangle + 6 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle^2 - 3 \langle N \rangle^4. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Koeficient šikmosti je definován vztahem

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle}{(\text{var}N)^{3/2}} = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^{3/2}} \quad (5.15)$$

a pro koeficient špičatosti platí vztah

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle}{(\text{var}N)^2} - 3 = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^2} - 3. \quad (5.16)$$

5.2 Časový vývoj centrálních momentů

5.2 Časový vývoj centrálních momentů

Stejně jako v kapitole 4.6.3 necháme systém vyvíjet v čase podle řídicí rovnice závislé na teplotě a na reálném čase. Nyní ale budeme zkoumat chování centrálních momentů a jejich poměrů jako je koeficient šikmosti a koeficient špičatosti. Centrální momenty a jejich rovnovážné hodnoty jsou definovány v kapitole 5.1.

Teplotu opět necháme po úplné termalizaci centrálních momentů a jejich poměrů klesat podle Bjorkenova modelu z počáteční teploty $T_0 = 0.165$ GeV podle vztahu

$$T = T_0 \frac{t_0}{t} \quad (5.17)$$

až na teplotu $T = 0.100$ GeV.

Čas t_0 je čas hadronizace pro teplotu $T = 0.165$ GeV. Z Bjorkenovy závislosti teploty na čase je $t_0 = 6$ fm/c.

Zároveň s teplotou se opět mění i objem systému podle vztahu

$$V = V_0 \frac{t}{t_0}, \quad (5.18)$$

kde $V_0 = 125$ fm³.

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s $N_0 = 0.005$.

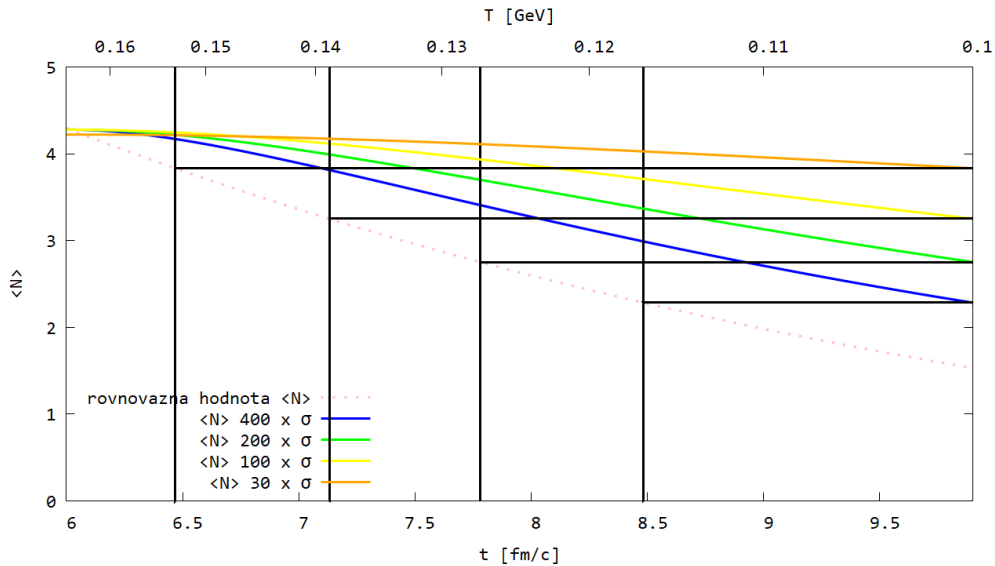
Výsledky jsou uvedeny na obrázcích níže.

Na Obr. 5.1 je znázorněn počet částic $\langle N \rangle$, jehož zdánlivé teploty vymrznutí jsou uvedeny v tabulce Tab. B.5. Na Obr. 5.2 je znázorněn 2. centrální moment μ_2 (variance) definovaný vztahem (5.11), jehož zdánlivé teploty vymrznutí jsou v tabulce Tab. B.6. Na Obr. 5.3 je vykreslena směrodatná odchylka σ (druhá odmocnina variance), která je definována vztahem (5.12) a jejíž zdánlivé teploty vymrznutí jsou v tabulce Tab. B.7. Na Obr. 5.4, resp. Obr. 5.5 vidíme 3. centrální moment μ_3 , resp. 4. centrální moment μ_4 , který je definovaný vztahem (5.13), resp. (5.14). Jeho zdánlivé teploty vymrznutí jsou v tabulce Tab. B.8, resp. Tab. B.9.

Dále na obrázcích Obr. 5.6, resp. Obr. 5.7 jsou vykresleny dva důležité poměry centrálních momentů, koeficient šikmosti a koeficient špičatosti. Tyto koeficienty jsou definovány vztahy

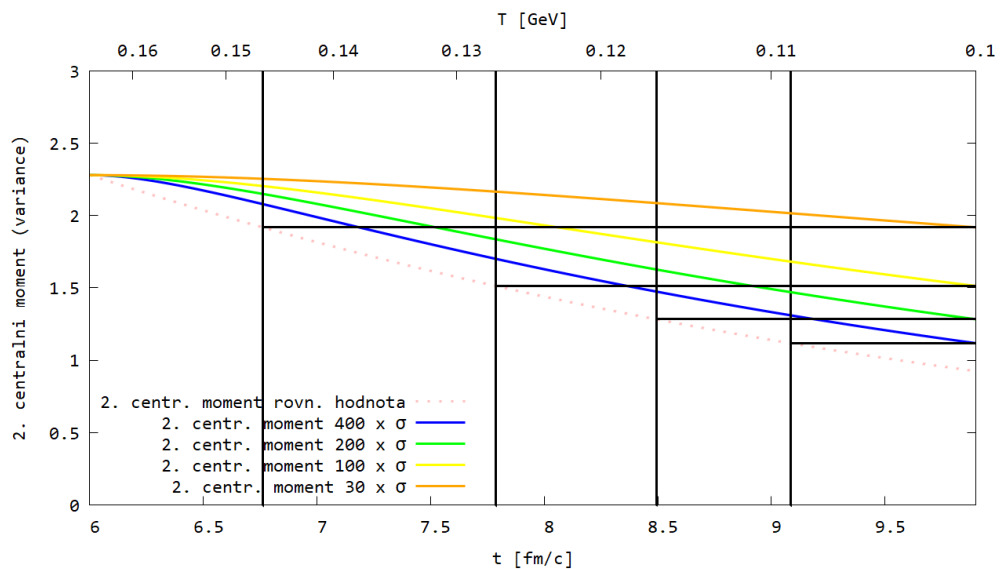
(5.15), resp. (5.16). Zdánlivé teploty vymrznutí pro koeficient šikmosti a koeficient špičatosti bylo možno určit pouze pro 200krát a 400krát zvětšený účinný průřez, což nejspíše souvisí s tím, že tyto poměry rostou s klesající teplotou a tudíž není možné extrapolovat žádnou zdánlivou teplotu vymrznutí. Zdánlivé teploty vymrznutí jsou uvedeny v tabulce Tab. B.10, resp. Tab. B.11. Tabulky jsou v příloze B.

Z obrázků tedy vidíme, že centrální momenty, norma a směrodatná odchylka klesají s rostoucím časem t , zatímco koeficient šikmosti a koeficient špičatosti rostou s rostoucím časem t .

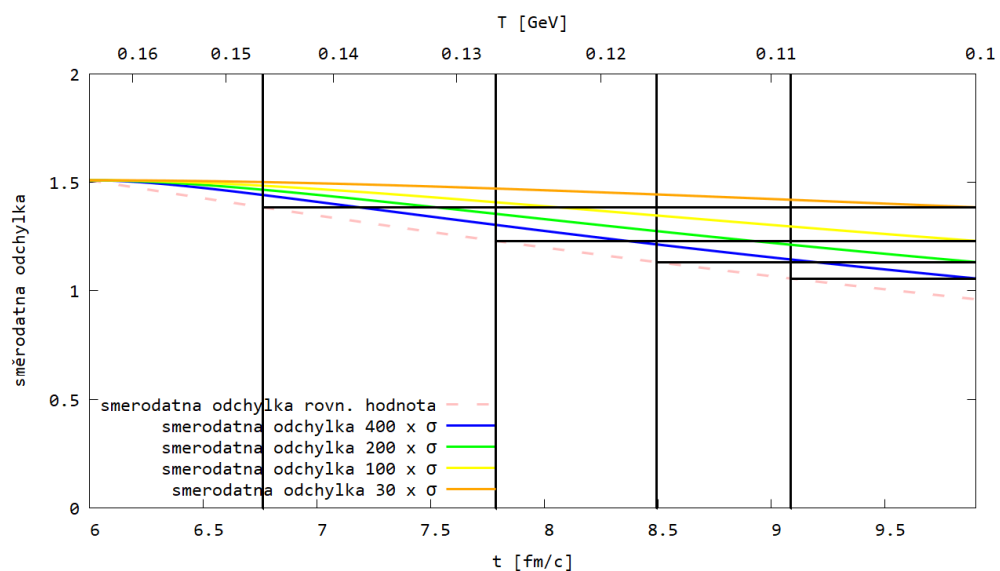


Obrázek 5.1: Zdánlivá teplota vymrznutí počtu částic pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

5.2 Časový vývoj centrálních momentů

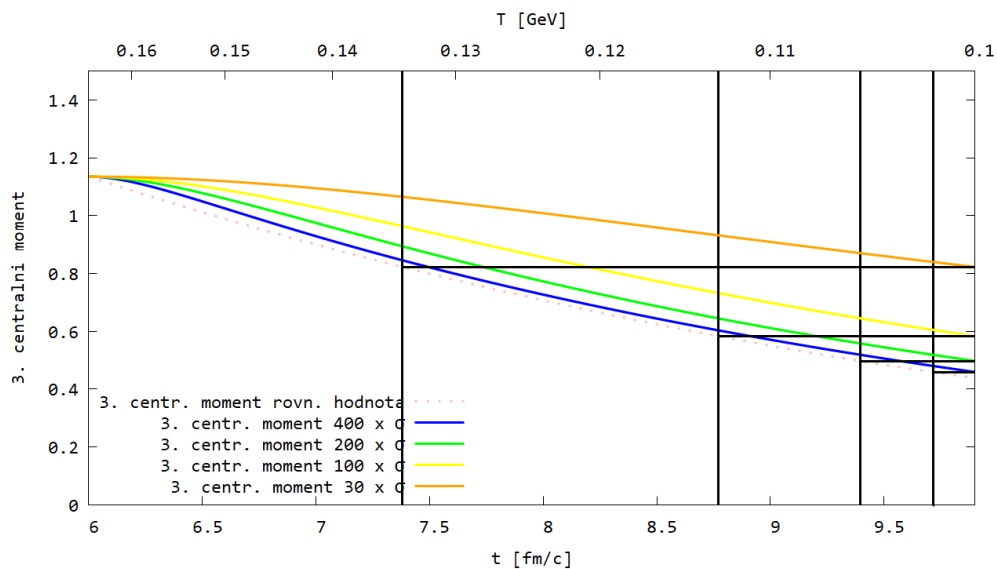


Obrázek 5.2: Zdánlivá teplota vymrznutí variance pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

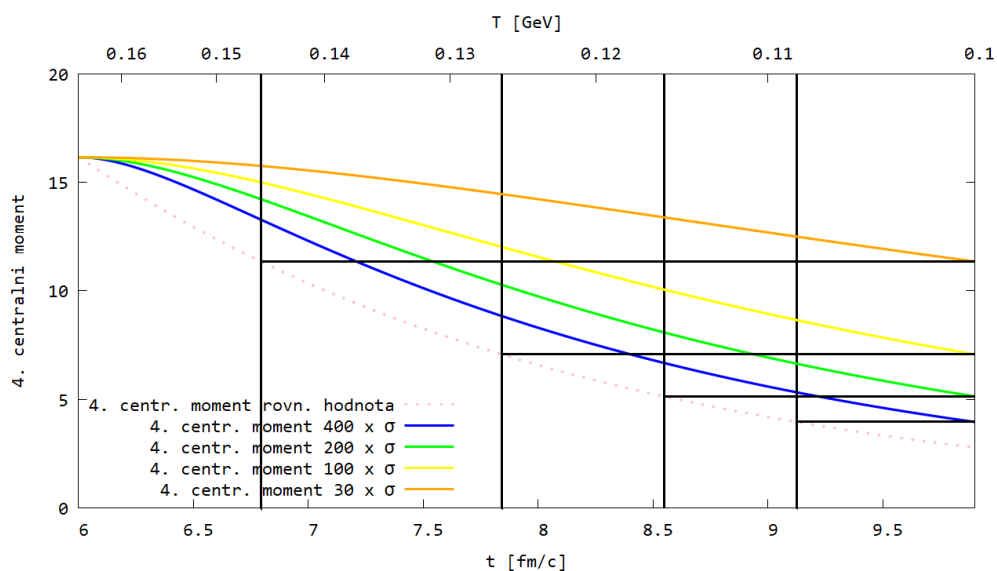


Obrázek 5.3: Zdánlivá teplota vymrznutí směrodatné odchylky pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

5 CENTRÁLNÍ MOMENTY

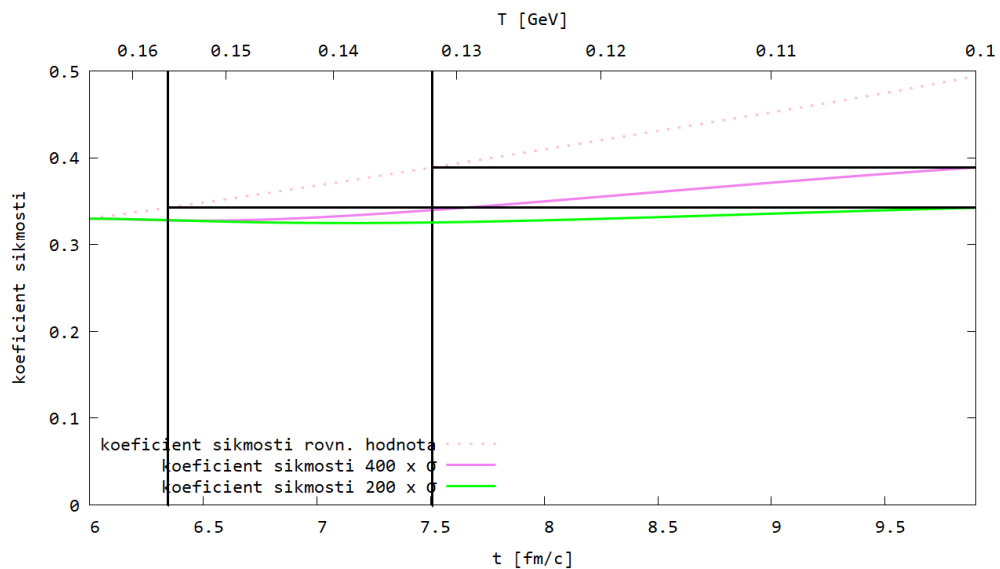


Obrázek 5.4: Zdánlivá teplota vymrznutí 3. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

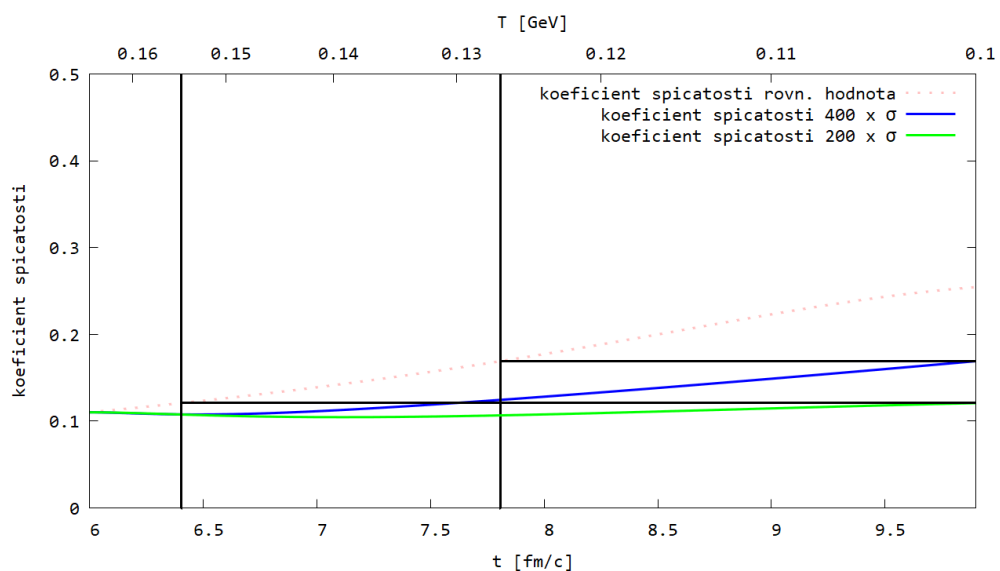


Obrázek 5.5: Zdánlivá teplota vymrznutí 4. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

5.2 Časový vývoj centrálních momentů



Obrázek 5.6: Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu šikmosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.7: Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu špicatosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

5.2.1 Další poměry centrálních momentů

Zatímco 2., 3. a 4. centrální moment klesají, jak je vidět z obrázků Obr. 5.2, Obr. 5.4 a Obr. 5.5, koeficient šikmosti a špičatosti rostou (Obr. 5.6, Obr. 5.7). Ukázalo se tedy, že by mohlo záviset na tom, jaké poměry centrálních momentů zvolíme. Proto prozkoumáme ještě další poměry centrálních momentů [22]. Tyto poměry nezávisí na objemu a jsou užitečné pro srovnání s experimentálními daty.

Budeme zkoumat následující poměry

$$R_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} = S\sigma, \quad (5.19)$$

$$R_{42} = \frac{\mu_4}{\mu_2} - 3\sigma^2 = \kappa\sigma^2, \quad (5.20)$$

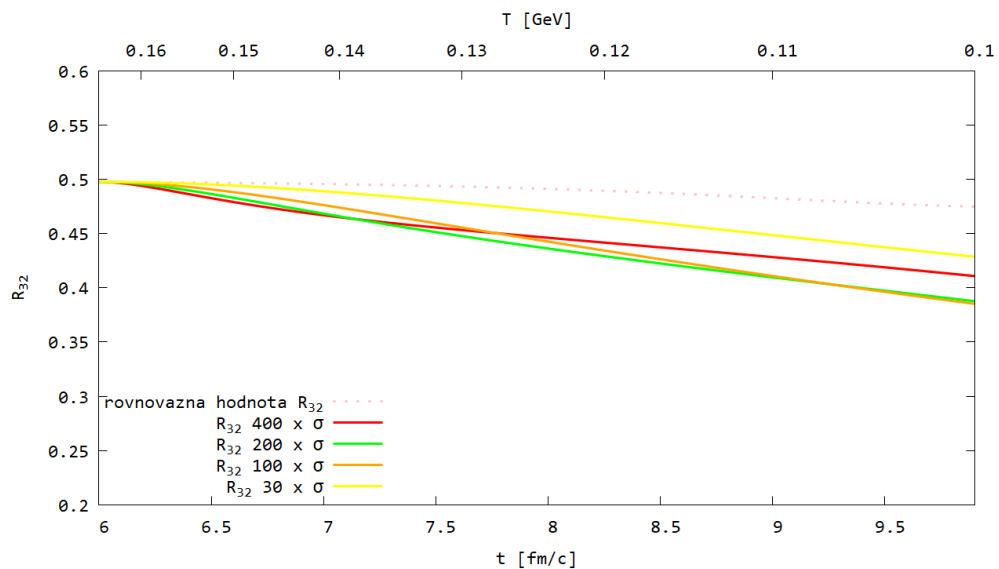
$$R_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = M/\sigma^2, \quad (5.21)$$

$$R_{31} = \frac{\mu_3}{\mu_1} = S\sigma^3/M, \quad (5.22)$$

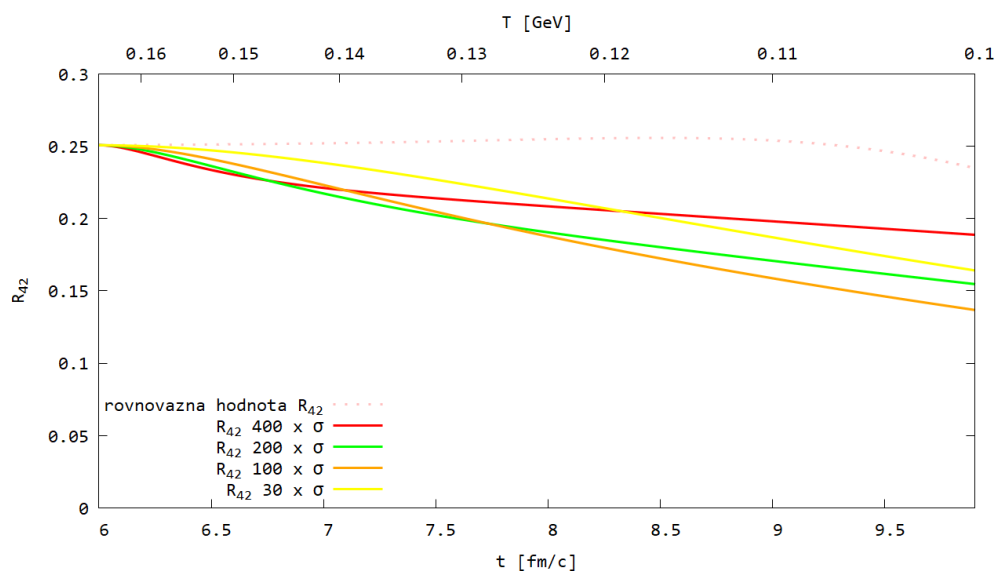
kde S je koeficient šikmosti, κ je koeficient špičatosti, σ je směrodatná odchylka a M je počet částic $\langle N \rangle$.

Koeficient R_{32} je na Obr. 5.8, koeficient R_{42} na Obr. 5.9, koeficient R_{12} na Obr. 5.10 a koeficient R_{31} na Obr. 5.11.

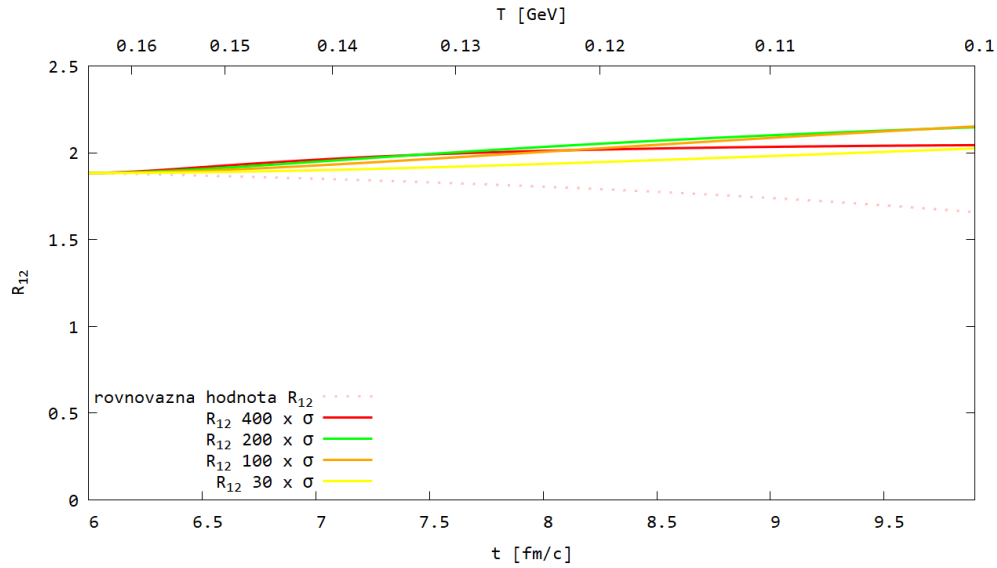
5.2 Časový vývoj centrálních momentů



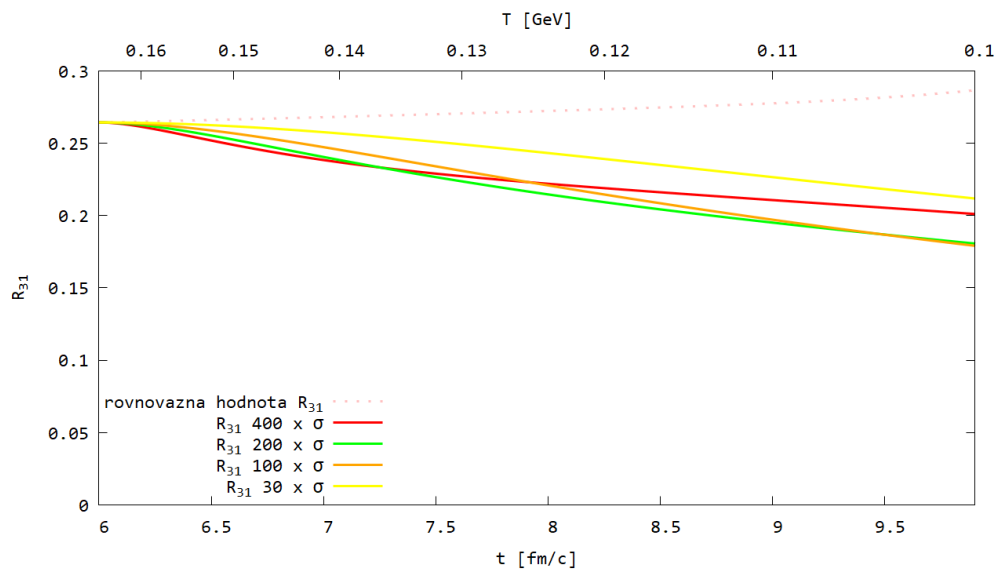
Obrázek 5.8: Koefficient R_{32} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.9: Koefficient R_{42} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.10: Koeficient R_{12} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.11: Koeficient R_{31} pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

5.2 Časový vývoj centrálních momentů

Z obrázků Obr. 5.8, Obr. 5.9 a Obr. 5.11 vidíme, že poměry R_{32} , R_{42} a R_{31} klesají s rostoucím časem t , zatímco rovnovážná hodnota má v případě poměrů R_{42} a R_{31} konstantní charakter a v případě poměru R_{32} také klesá s časem t .

Jelikož jsou poměry R_{32} , R_{42} a R_{31} klesající a jejich rovnovážné hodnoty klesají pomaleji než samotné poměry, nelze zpětně určit příslušné zdánlivé teploty vymrznutí.

Z Obr. 5.10 vidíme, že poměr R_{12} roste s rostoucím časem t , zatímco jeho rovnovážná hodnota pomalu klesá s rostoucím časem t . Ani v případě poměru R_{12} tedy nelze zpětně určit příslušné zdánlivé teploty vymrznutí.

Poměry R_{42} , R_{32} a R_{31} tedy všechny klesají s rostoucím časem t , zatímco poměr R_{12} roste. Tento rozdíl je zřejmě způsoben tím, že poměry R_{42} (tedy podíl 4. centrálního momentu a 2. centrálního momentu), R_{32} (tedy poměr 3. centrálního momentu a 2. centrálního momentu) a R_{31} (tedy poměr 3. centrálního momentu a počtu částic $\langle N \rangle$) jsou vždy podílem vyššího centrálního momentu ku nižšímu, zatímco poměr R_{12} je poměrem nižšího centrálního momentu, resp. počtu částic, ku vyššímu centrálnímu momentu.

Závěr

Motivací tohoto výzkumného úkolu je pozorování, že celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic z ultrarelativistických jaderných srážek souhlasí se statistickým modelem nad 160 MeV. Na druhé straně je možné teplotu fázového přechodu stanovit tak, že se měří vyšší momenty (druhý, třetí a čtvrtý) rozdělení multiplicity protonů a ty se potom porovnávají s výsledky pro susceptibility baryonového čísla, které máme z QCD na mřížce. Tímto způsobem můžeme najít teploty, při kterých se teoretické a experimentální výsledky shodují. Problém je v tom, že fluktuace počtu baryonů obvykle vedou k zdánlivě nižší teplotě fázového přechodu než zkoumání počtu částic. Naše simulace s postupným poklesem teploty ukazují, že to tak může být proto, že vyšší momenty zdánlivě ukazují jinou teplotu, než při jaké systém opravdu máme, protože nedosahují rovnovážné hodnoty.

V první kapitole jsme uvedli základní poznatky o srážkách těžkých iontů, kvantové chromodynamice, povaze fázového diagramu a kritickém bodu. Dále jsme se zaměřili na vlastnosti kvark-gluonového plazmatu a na analogii mezi fyzikou relativistických srážek a fyzikou raného vesmíru. Ve druhé kapitole jsme zkoumali časoprostorový vývoj ultrarelativistické srážky těžkých iontů. Zaměřili jsme se na termalizaci, tepelné a chemické vymrznutí. V další kapitole jsme se věnovali rovnici pro rozdělení multiplicity, řídicí rovnici a generující funkci. Za pomoci generující funkce jsme odvodili rovnovážné hodnoty faktoriálních momentů a numericky jsme řešili řídicí rovnici. Následující kapitola je věnována řídicí rovnici závislé na teplotě a reálném čase. Tuto rovnici jsme řešili numericky pro reakci $\pi + N \rightarrow K + \Lambda$ a došli jsme k závěru, že v nerovnovážném stavu (po snížení teploty) se vyšší faktoriální momenty více liší od svých rovnovážných hodnot než momenty nižší. V páté poslední kapitole jsme se zaměřili na momenty centrální a také na jejich kombinace jako je např. koeficient šikmosti a špičatosti, které nás zajímají při zpracovávání dat. Odvodili jsme jejich rovnovážné hodnoty a vykreslili jsme jejich časový vývoj. Zjistili jsme, že chování kombinací těchto centrálních momentů závisí na tom, jakou kombinaci momentů zvolíme a proto bude dále nutné zkoumat více realistické případy jako je např. reakce $\pi + N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$.

A Příloha: Vztahy pro modifikované Besselovy funkce

Obecné vztahy pro modifikované Besselovy funkce mají tvar

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cosh \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(z \cosh \theta) d\theta, \quad (\text{A.1})$$

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{A.2})$$

a pro modifikovanou Besselovu funkci $I_1(z)$ platí

$$I_1(z) = I_0'(z). \quad (\text{A.3})$$

Derivace funkce $I_0(z)$ je dána vztahem

$$I_0'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta e^{z \cos \theta} d\theta. \quad (\text{A.4})$$

Modifikovaná Besselova funkce $I_1(z)$ je tedy dána vztahem (A.4).

Derivace funkce $I_1(z)$ je dána vztahem

$$I_1'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta. \quad (\text{A.5})$$

Z rovnice (A.2) dostáváme pro $n = 2$ vztah pro modifikovanou Besselovu funkci $I_2(z)$

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(2\theta) d\theta. \quad (\text{A.6})$$

Při využití vztahů

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad (\text{A.8})$$

dostaneme

A PŘÍLOHA: VZTAHY PRO MODIFIKOVANÉ BESSELOVY FUNKCE

$$\begin{aligned}
 I_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} d\theta = 2I_1'(z) - I_0(z). \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Potom

$$I_1'(z) = \frac{1}{2}I_2(z) + \frac{1}{2}I_0(z). \quad (\text{A.10})$$

Ze vztahu (A.2) dostaneme pro $n = 3$ modifikovanou Besselovu funkci $I_3(z)$ ve tvaru

$$I_3(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(3\theta) d\theta. \quad (\text{A.11})$$

Pro úpravu tohoto vztahu budeme potřebovat výraz

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (\text{A.12})$$

a derivaci modifikované Besselovy funkce $I_2(z)$

$$I_2'(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^3 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos \theta d\theta. \quad (\text{A.13})$$

Úpravou vztahu (A.11) pomocí vztahů (A.12) a (A.13) dostaneme

$$I_3(z) = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^3 \theta d\theta - \frac{3}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos \theta d\theta = 2I_2'(z) - I_1(z). \quad (\text{A.14})$$

Ze vztahu (A.14) potom získáme derivaci modifikované Besselovy funkce $I_2'(z)$

$$I_2'(z) = \frac{1}{2}I_3(z) + \frac{1}{2}I_1(z). \quad (\text{A.15})$$

Ze vztahu (A.2) dostaneme pro $n = 4$ modifikovanou Besselovu funkci $I_4(z)$ ve tvaru

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(4\theta) d\theta. \quad (\text{A.16})$$

Pro úpravu vztahu (A.16) využijeme vztah

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta = (1 - \cos^2\theta)^2 - 6\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + \cos^4\theta \\ &= 1 - 2\cos^2\theta + 2\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 6\cos^4\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta \quad (\text{A.17})\end{aligned}$$

a derivaci modifikované Besselovy funkce $I_3(z)$

$$I_3'(z) = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi e^{z\cos\theta} \cos^4\theta d\theta - \frac{3}{\pi} \int_0^\pi e^{z\cos\theta} \cos^2\theta d\theta. \quad (\text{A.18})$$

Ze vztahů (A.16) dostaneme pomocí vztahů (A.17) a (A.18) výraz

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z\cos\theta} d\theta - \frac{8}{\pi} \int_0^\pi e^{z\cos\theta} \cos^2\theta d\theta + \frac{8}{\pi} \int_0^\pi e^{z\cos\theta} \cos^4\theta d\theta = 2I_3'(z) - I_2(z). \quad (\text{A.19})$$

Potom ze vztahu (A.19) dostaneme vztah pro derivaci modifikované Besselovy funkce $I_3(z)$

$$I_3'(z) = \frac{1}{2}I_4(z) + \frac{1}{2}I_2(z). \quad (\text{A.20})$$

Pro odvození faktoriálních momentů v rovnovážném stavu v kapitole 3.7 se nám tedy budou hodit vztahy

$$I_1(z) = I_0'(z), \quad (\text{A.21})$$

$$I_1'(z) = \frac{1}{2}I_2(z) + \frac{1}{2}I_0(z), \quad (\text{A.22})$$

$$I_2'(z) = \frac{1}{2}I_3(z) + \frac{1}{2}I_1(z), \quad (\text{A.23})$$

$$I_3'(z) = \frac{1}{2}I_4(z) + \frac{1}{2}I_2(z). \quad (\text{A.24})$$

Vztahy pro modifikované Besselovy funkce (A.1), (A.2) a (A.3) byly převzaty z [18].

B PŘÍLOHA: TABULKY ZDÁNLIVÝCH TEPLŮ A ZDÁNLIVÝCH ČASŮ
VYMRZnutí PRO FAKTORIÁLNÍ A CENTRÁLNÍ MOMENTY

Příloha B

B Příloha: Tabulky zdánlivých teplot a zdánlivých časů vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty

Tabulky pro faktoriální momenty:

Moment	norma	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/c]$	6.4682	6.7794	6.8306	6.8866
$T[\text{GeV}]$	0.1531	0.1460	0.1449	0.1438

Tabulka B.1: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 30 krát větší účinný průřez.

Moment	norma	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/c]$	7.1310	7.8112	7.9296	8.0552
$T[\text{GeV}]$	0.1388	0.1267	0.1248	0.1229

Tabulka B.2: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 100 krát větší účinný průřez.

Moment	norma	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/c]$	7.7802	8.5458	8.6986	8.8540
$T[\text{GeV}]$	0.1272	0.1158	0.1138	0.1118

Tabulka B.3: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 200 krát větší účinný průřez.

Moment	norma	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/c]$	8.4838	9.1944	9.3470	9.4898
$T[\text{GeV}]$	0.1167	0.1077	0.1059	0.1043

Tabulka B.4: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro 400 krát větší účinný průřez.

Tabulky pro centrální momenty a jejich poměry:

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	6.4682	7.1310	7.7802	8.4838
$T[\text{GeV}]$	0.1531	0.1388	0.1272	0.1167

Tabulka B.5: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro normu.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	6.7606	7.7862	8.4932	9.0842
$T[\text{GeV}]$	0.1464	0.1271	0.1166	0.1090

Tabulka B.6: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro varianci.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	6.7606	7.7862	8.4932	9.0842
$T[\text{GeV}]$	0.1464	0.1271	0.1166	0.1090

Tabulka B.7: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro směrodatnou odchylku.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	7.3796	8.7714	9.3964	9.7160
$T[\text{GeV}]$	0.1341	0.1129	0.1053	0.1019

Tabulka B.8: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro 3. centrální moment.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	6.7932	7.8408	8.5482	9.1238
$T[\text{GeV}]$	0.1457	0.1263	0.1158	0.1085

Tabulka B.9: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro 4. centrální moment.

B PŘÍLOHA: TABULKY ZDÁNLIVÝCH TEPLOT A ZDÁNLIVÝCH ČASŮ
VYMRZnutí PRO FAKTORIÁLNÍ A CENTRÁLNÍ MOMENTY

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	-	-	6.3422	7.5066
$T[\text{GeV}]$	-	-	0.1561	0.1319

Tabulka B.10: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient šikmosti.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	-	-	6.4005	7.8092
$T[\text{GeV}]$	-	-	0.1547	0.1268

Tabulka B.11: Hodnoty zdánlivého času t a zdánlivé teploty vymrznutí T pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient špičatosti.

REFERENCE

Reference

- [1] W. Florkowski, *Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions*, London: World Scientific, 2010, ISBN 98-142-8066-6.
- [2] Fázový diagram QCD:
<https://cds.cern.ch/record/1955819/files/TUOAA2f1-eps-converted-to.png>
[online 24/07/2017].
- [3] S. Sarkar, H. Satz, B. Sinha, *The Physics of the Quark-Gluon Plasma: Introductory Lectures*, Lect. Notes Phys. **785**, Springer, Berlin Heidelberg 2010, ISBN 978-3-642-02286-9.
- [4] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics*, Nature **443** (2006) 675.
- [5] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit*, Phys. Lett B **643** (2006) 46.
- [6] A. Bazavov et. al., *QCD equation of state to $O(\mu_B^6)$ from lattice QCD*, Phys. Rev. D **95** (2017) 054504.
- [7] Malý třesk: <https://u.osu.edu/vishnu/physics/> [online 11/04/2017].
- [8] Velký třesk: https://www.nikhef.nl/~i93/img/universe_original.jpg [online 11/04/2017].
- [9] Časoprostorový vývoj:
https://www.physics.ohio-state.edu/~ntg/6805/figures/RHIC_timescales_Strickland.png
[online 11/04/2017].
- [10] P. Alba, W. Alberico, R. Bellwied, M. Bluhm, V. Mantovani Sarti, M. Nahrgang and C. Ratti, *Freeze-out conditions from net-proton and net-charge fluctuations at RHIC*, Phys. Lett. B **738** (2014) 305, arXiv:1403.4903.
- [11] Francois Gelis, *Color Glass Condensate and Glasma*, International Journal of Modern Physics A **28** (2012) 1330001, arXiv:1211.3327v2.
- [12] B. Tomášik, F. Sannino, I. Bearden a T. Dossing, *Topics in modern nuclear physics: Flow and Sizes*, Kobenhavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.

- [13] C. M. Ko, V. Koch, Z.-W. Lin, K. Redlich, M. Stephanov, X.-N. Wang, *Kinetic Equation with Exact Charge Conservation*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5438.
- [14] S. Jeon, V. Koch, K. Redlich, X.-N. Wang, *Fluctuations of rare particles as a measure of chemical equilibration*, Nucl. Phys. A **697** (2002) 546-562.
- [15] C. M. Ko and L. Xia, *K^+/π^+ enhancement in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **38** (1988) 179.
- [16] B. Tomášik and E. E. Kolomeitsev, *Strangeness dynamics in heavy-ion collisions: The K/π ratios and the lifetime of a fireball*, arXiv:nucl-th/0512088v1 (2005).
- [17] Koeficienty: <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35b.htm> [online 17/04/2017].
- [18] Modifikované Besselovy funkce: http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_376.htm [online 17/04/2017].
- [19] Particle Data Group:
http://pdg.lbl.gov/2016/tables/contents_tables.html [online 17/04/2017].
- [20] "Columbia plot":
<https://quark.phy.bnl.gov/~htding/usqcd/scaling.html> [online 17/04/2017].
- [21] J. D. Bjorken, *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region*, Phys. Rev. D **27** (1983) 140.
- [22] S. Borsanyi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti and K. K. Szabo, *Freeze-out Parameters from Electric Charge and Baryon Number Fluctuations: Is there Consistence?*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 052301.