Termalizace rozdělení multiplicity

Radka Sochorová
Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

FJFI ČVUT v Praze

27. 9. 2017

Obsah

- Motivace
- Řídící rovnice
- Faktoriální momenty
- Zdánlivá teplota vymrznutí momentů
- Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase
- Centrální momenty
- Další význačné poměry
- Závěr

Motivace

- Celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic souhlasí se statistickým modelem při teplotách nad 160 MeV.
- Teplotu fázového přechodu lze stanovit také pomocí metod QCD na mřížce $\rightarrow$ susceptibility jako funkce teploty se mění nejrychleji $\rightarrow$ 150 MeV.
- Susceptibility se projevují ve vyšších momentech rozdělení multiplicity.
- Cílem je zjistit, jak rychle různé momenty dosáhnou své rovnovážné hodnoty a jak se chovají mimo rovnováhu.
- Vývoj rozdělení multiplicity mimo rovnováhu je popsán pomocí řídící rovnice.

Řídící rovnice

- Předpokládejme binární proces $a_1 a_2 \to b_1 b_2$, kde $a \neq b$, jako je např. reakce $\pi N \to K\Lambda$
- Řídící rovnice pro pravděpodobnosti P_n, že najdeme n párů $b_1 b_2$ v čase τ, má následující tvar

$$\frac{dP_n}{d\tau} = \epsilon \left[P_{n-1} - P_n\right] - \left[n^2 P_n - (n+1)^2 P_{n+1}\right], \tag{1}$$

kde $n = 0, 1, 2, 3...$, $\epsilon = G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L$, $\tau = t\ L/V$ - bezrozměrný čas, $V/L = \tau_0^c$ - relaxační čas, V - vlastní objem reakce.

- Pro tepelná rozdělení hybností částic $\to$ G - "kreační člen", L - "anihilační člen" $\Rightarrow$ tepelné průměry účinných průřezů

Časový vývoj faktoriálních momentů

- Normovaný druhý faktoriální moment

$$F_2(\tau) = \langle N(N-1)\rangle \,/\, \langle N\rangle^2 \,, \tag{2}$$

- normovaný třetí faktoriální moment

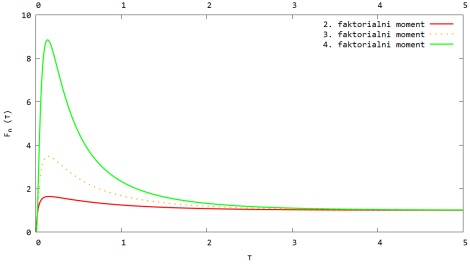
$$F_3(\tau) = \langle N(N-1)(N-2)\rangle \,/\, \langle N\rangle^3 \tag{3}$$

- a normovaný čtvrtý faktoriální moment

$$F_4(\tau) = \langle N(N-1)(N-2)(N-3)\rangle \,/\, \langle N\rangle^4 \,. \tag{4}$$

- Rozdělení multiplicity necháme vyvíjet v čase podle řídící rovnice.
- Numericé výpočty $\rightarrow$ binomické počáteční podmínky.

Časový vývoj 2., 3. a 4. faktoriálního momentu, které jsou předělené jejich rovnovážnými hodnotami



- $\epsilon = 0.1$
- $N_0 = 0.005$
- Stejně rychlá termalizace momentů
- Čím vyšší moment, tím dál od rovnováhy fluktuuje

Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase

- Pro další studium přidáme závislost na teplotě a reálném čase.
- V případě neměnné teploty $\rightarrow$ rovnice formulována v bezrozměrném čase.
- Vývoj budeme počítat pro konkrétní chemickou reakci $\pi^+ + n \longrightarrow K^+ + \Lambda^0$.
- Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt}(t) = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle \left[P_{n-1}(t) - P_n(t)\right] \\ -\frac{L}{V} \left[n^2 P_n(t) - (n+1)^2 P_{n+1}(t)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

kde $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$ a $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$.

Řídící rovnice závislá na teplotě - postupná změna teploty

- Po úplné termalizaci faktoriálních momentů teplota klesá podle Bjorkenova modelu z počáteční teploty $T_0 = 165\ \mathrm{MeV}$ podle vztahu

$$T = T_0 \frac{t_0}{t} \tag{6}$$

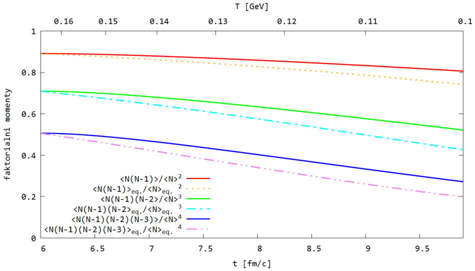
až na teplotu $T = 100\ \mathrm{MeV}$, t_0 je čas hadronizace pro $T = 165\ \mathrm{MeV}$ $\rightarrow t_0 = 6\ \mathrm{fm/c}$.

- Objem systému se mění podle vztahu

$$V = V_0 \frac{t}{t_0}. \tag{7}$$

- Abychom získali v našich výsledkách čas termalizace kvark-gluonového plazmatu (okolo $10\ \mathrm{fm/c}$) $\rightarrow$ různě přeškálujeme účinné průřezy.

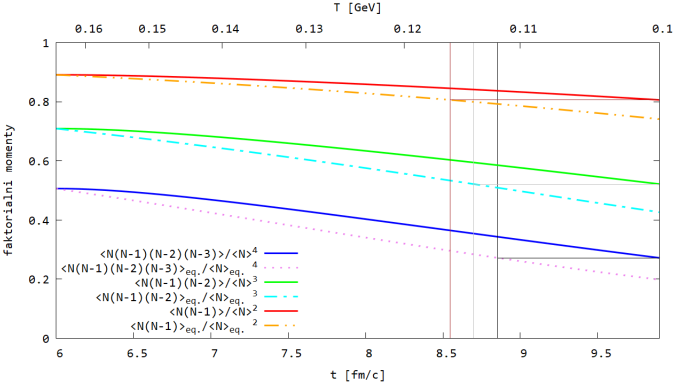
Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty



- Pokles ze 165 MeV na 100 MeV
- Čas termalizace okolo 10 $\mathrm{fm/c}$
- Pro 15 pionů a 10 neutronů
- 200krát zvětšený účinný průřez

Teplota vymrznutí

- Momenty nastavíme na počátku na rovnovážné hodnoty → necháme je vyvíjet → hledáme teplotu, při které by termalizovaný systém vedl k dané hodnotě faktoriálního momentu v rovnovážném stavu → zpětné určení zdánlivé teploty vymrznutí.

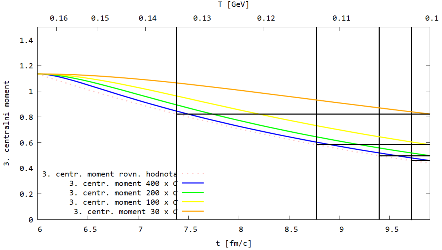


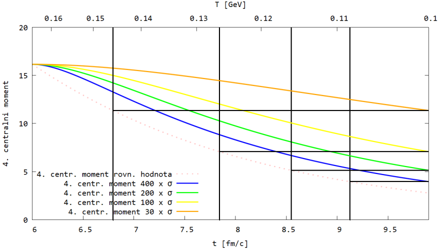
Centrální momenty

- Při zpracování dat $\rightarrow$ momenty centrální, popř. jejich kombinace.
- 2. centrální moment (variance) $\mu_2 = \left\langle N^2 \right\rangle - \left\langle N \right\rangle^2$.
- 3. centrální moment $\mu_3 = \left\langle (N - \langle N \rangle)^3 \right\rangle$.
- 4. centrální moment $\mu_4 = \left\langle (N - \langle N \rangle)^4 \right\rangle$.
- Koeficient šikmosti $S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{\left\langle (N - \langle N \rangle)^3 \right\rangle}{\left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle^{3/2}}$.
- Koeficient špičatosti $\kappa = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{\left\langle (N - \langle N \rangle)^4 \right\rangle}{\left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle^2} - 3$.

Zdánlivá teplota vymrznutí 3.(vlevo) a 4. (vpravo) centrálního momentu pro postupnou změnu teploty

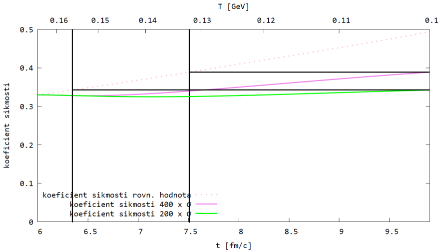
- Pokles ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů
- Jiné zdánlivé teploty vymrznutí pro každý moment

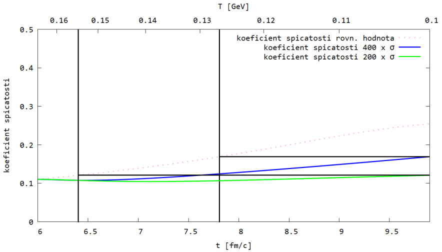




Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu šikmosti (vlevo) a špičatosti (vpravo) pro postupnou změnu teploty

- Pokles ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů





Další poměry centrálních momentů

- Zatímco 2., 3. a 4. centrální moment klesají, koeficient šikmosti a špičatosti rostou $\rightarrow$ závislost na tom, jaký poměr zvolíme.
- Poměry nezávislé na objemu $\rightarrow$ užitečné pro srovnání s experimentálními daty, např.

$$R_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} = S\sigma \tag{8}$$

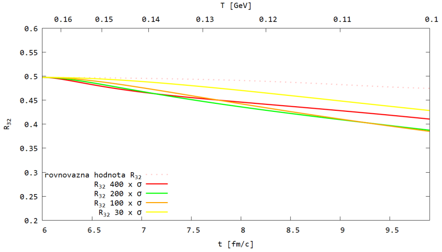
nebo

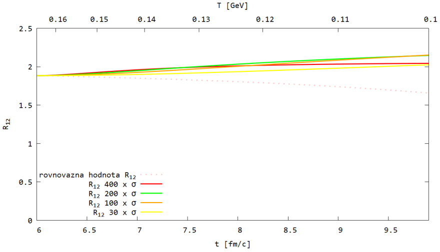
$$R_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = M/\sigma^2, \tag{9}$$

kde S je koeficient šikmosti, σ je směrodatná odchylka a M je počet částic $\langle N \rangle$.

Koeficient R_{32} (vlevo) a R_{12} (vpravo) pro postupnou změnu teploty

- Pokles ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů





Závěr

- Teplotu fázového přechodu je možné také stanovit měřením vyšších momentů rozdělení multiplicity protonů $\rightarrow$ porovnání s výsledky pro susceptibility baryonového čísla.
- Fluktuace počtu baryonů obvykle vedou k zdánlivě nižší teplotě fázového přechodu než zkoumání počtu částic $\rightarrow$ možná proto, že vyšší momenty zdánlivě ukazují jinou teplotu, než při jaké systém opravdu máme.
- V nerovnovážném stavu se vyšší faktoriální momenty více liší od svých rovnovážných hodnot než momenty nižší.
- Chování kombinací centrálních momentů závisí na tom, jakou kombinaci momentů zvolíme $\Longrightarrow$ zkoumání více realistických případů jako je např. reakce $\pi + N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$.

Reference

- S. Jeon, V. Koch, K. Redlich, X.-N. Wang, *Fluctuations of rare particles as a measure of chemical equilibration*, Nucl. Phys. A **697** (2002) 546-562.
- C. M. Ko, V. Koch, Z.-W. Lin, K. Redlich, M. Stephanov, X.-N. Wang, *Kinetic Equation with Exact Charge Conservation*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5438.
- C. M. Ko and L. Xia, *K^+/π^+ enhancement in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **38** (1988) 179.
- B. Tomášik and E. E. Kolomeitsev, *Strangeness dynamics in heavy-ion collisions: The K/π ratios and the lifetime of a fireball*, arXiv:nucl-th/0512088v1 (2005).
- P. Alba, W. Alberico, R. Bellwied, M. Bluhm, V. Mantovani Sarti, M. Nahrgang and C. Ratti, *Freeze-out conditions from net-proton and net-charge fluctuations at RHIC*, Phys. Lett. B **738** (2014) 305, arXiv:1403.4903.

Dodatečné slidy

Generující funkce

- Rovnici pro pravděpodobnosti P_n můžeme převést na parciální diferenciální rovnici pro generující funkci

$$g(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau). \tag{10}$$

- Z derivací generující funkce pak můžeme spočítat momenty.
- Vynásobením rovnice (10) x^n a vysčítáním přes n získáme

$$\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{L}{V}(1-x)(xg'' + g' - \epsilon g), \tag{11}$$

  kde $g' \equiv \partial g / \partial x$.
- $g(1,\tau)$ se nemění v čase, což je ekvivalentní zachování celkové pravděpodobnosti.

- Řešení v rovnovážném stavu $g_{eq.}(x)$ získáme po vyřešení rovnice

$$x g''_{eq.} + g'_{eq.} - \epsilon g_{eq.} = 0. \tag{12}$$

- Řešení, které je regulérní v $x = 0$ ($g(0) = P_0 \leq 1$)

$$g_{eq.}(x) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}, \tag{13}$$

$g(1) = \sum P_n = 1.$

- Průměrný počet $b_1 b_2$ párů v 1 eventu v rovnováze

$$\langle N \rangle_{eq.} = g'_{eq.}(1) = \sqrt{\epsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\epsilon})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}. \tag{14}$$

Vyšší faktoriální momenty v rovnovážném stavu

- Vyšší faktoriální momenty můžeme vyjádřit pomocí derivací generující funkce $g(x, \tau)$, která je dána rovnicí (10).
- Při odvození byly použity tyto vztahy pro modifikované Besselovy funkce

$$I_0^{'}(z) = I_1(z), \tag{15}$$

$$I_1^{'}(z) = \frac{1}{2}(I_2(z) + I_0(z)), \tag{16}$$

$$I_2^{'}(z) = \frac{1}{2}(I_3(z) + I_1(z)), \tag{17}$$

$$I_3^{'}(z) = \frac{1}{2}(I_4(z) + I_2(z)). \tag{18}$$

Druhý faktoriální moment

- Druhá derivace generující funkce

$$g''_{eq.}(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}x^{-3/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon\frac{1}{x}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (19)$$

- Rovnovážná hodnota druhého faktoriálního momentu

$$\langle N(N-1)\rangle_{eq.} = g''_{eq.}(1) = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (20)$$

Třetí faktoriální moment

- Třetí derivace generující funkce

$$g_{eq.}^{'''}(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{5}{4}\varepsilon\frac{1}{x^2}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\varepsilon^{3/2}\frac{1}{x^{3/2}}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon x}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \tag{21}$$

- Rovnovážná hodnota třetího faktoriálního momentu

$$\langle N(N-1)(N-2)\rangle_{eq.} = g_{eq.}^{'''}(1) = \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{5}{4}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \tag{22}$$

Čtvrtý faktoriální moment

- Čtvrtá derivace generující funkce

$$
\begin{aligned}
g_{eq.}^{IV.}(x) = {} & \frac{3}{8}\varepsilon\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}x^{-7/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
& + \frac{5}{2}\varepsilon\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{5}{8}\varepsilon^{3/2}\frac{1}{x^{5/2}}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
& - \frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon x}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
& + \frac{1}{8}\varepsilon^2\frac{1}{x^2}\frac{I_4(2\sqrt{\varepsilon x}) + 2I_2(2\sqrt{\varepsilon x}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

- Rovnovážná hodnota čtvrtého faktoriálního momentu

$$\langle N(N-1)(N-2)(N-3)\rangle_{eq.} = g^{IV}_{eq.}(1) = \frac{23}{8}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon})+I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}$$
$$-\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \varepsilon^{3/2}\frac{4I_3(2\sqrt{\varepsilon})+7I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})}$$
$$+\frac{1}{8}\varepsilon^2\frac{I_4(2\sqrt{\varepsilon})+2I_2(2\sqrt{\varepsilon})+I_0(2\sqrt{\varepsilon x})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \tag{24}$$

Binomické počáteční podmínky

- Předpokládáme, že na počátku je v daném eventu maximálně 1 částice.
- Počáteční podmínky mají potom tvar

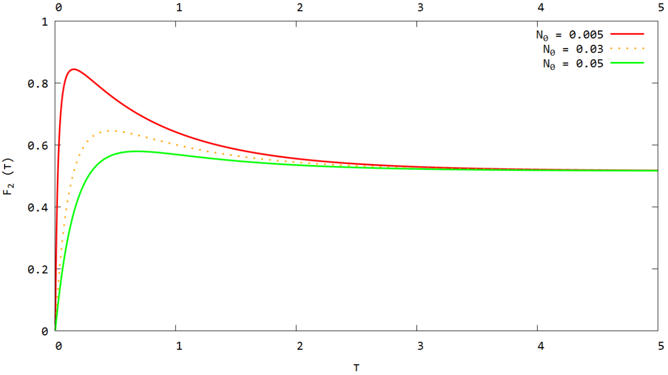
$$P_0(\tau = 0) = 1 - N_0 \tag{25}$$

$$P_1(\tau = 0) = N_0 \tag{26}$$

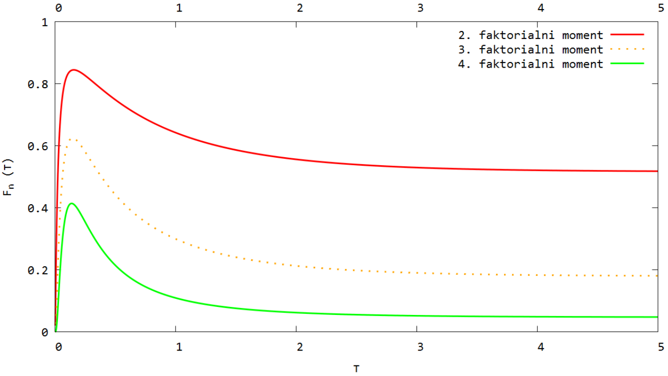
$$P_n(\tau = 0) = 0, n > 1 \tag{27}$$

  kde N_0 je počáteční průměrný počet částic.
- V tomto případě začínají faktoriální momenty v 0.

Časový vývoj 2. faktoriálního momentu pro binomické počáteční podmínky. Druhý faktoriální moment pro různé hodnoty průměrného počátečního počtu částic N_0 a pro $\epsilon = 0.1$



2., 3. a 4. faktoriální moment pro binomické počáteční podmínky pro $\epsilon = 0.1$ a $N_0 = 0.005$



Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase

- Pro potřeby průměrování přes relativní rychlosti jsme předpokládali, že jsou hybnosti rozděleny podle Boltzmannova rozdělení

$$n_i(p) \propto exp\left(-\frac{\sqrt{m_i^2 + p^2}}{T}\right), \tag{28}$$

kde p je hybnost, m_i je hmotnost částice i a T je teplota.

- Průměrný účinný průřez

$$\left\langle v_{ij}\sigma_{ij}^X \right\rangle = \frac{\int_{\sqrt{s_0}}^{\infty} dx \sigma_{ij}^X(x) K_1(\frac{x}{T}) \left[x^2 - (m_i + m_j)^2\right] \left[x^2 - (m_i - m_j)^2\right]}{4 m_i^2 m_j^2 T K_2(m_i/T) K_2(m_j/T)}, \tag{29}$$

kde K_i jsou modifikované Besselovy funkce a $\sqrt{s_0} = max(m_i + m_j, \Sigma_{final} m_a)$ je prahová energie reakce.

- Pokud známe účinný průřez pro reakci $a_1 a_2 \to b_1 b_2$, účinný průřez pro inverzní reakce vychází z předpokladů fázového prostoru jako

$$\sigma_{34\longrightarrow 12}(\sqrt{s}) = \frac{(2J_3+1)(2J_4+1)}{(2J_1+1)(2J_2+1)} \frac{p_{cm}^2(s, m_1, m_2)}{p_{cm}^2(s, m_3, m_4)} \times \sigma_{12\longrightarrow 34}(\sqrt{s}), \tag{30}$$

kde J_i a m_i jsou spiny a hmotnosti částic, které se účastní reakce, a p_{cm} je hybnost v soustavě hmotného středu definovaná jako

$$p_{cm}^2(s, m_1, m_2) = \frac{\left[s - (m_1^2 + m_2^2)\right]^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4s}. \tag{31}$$

Reakce $\pi^+ + n \longrightarrow K^+ + \Lambda^0$.

- Pro hmotnosti a spiny platí

$$m_{\pi^+} = 139,570 \text{ MeV}, \quad m_n = 939,565 \text{ MeV}, \quad m_{\Lambda^0} = 1116 \text{ MeV}, \\ m_{K^+} = 493,667 \text{ MeV}, \tag{32}$$

$$d_{\pi^+} = 0, \quad d_n = 2, \quad d_{\Lambda^0} = 2, d_{K^+} = 0. \tag{33}$$

- Objem reakce uvažujeme $V = 125 \text{ fm}^3$.
- Účinný průřez pro tuto reakci je

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,054 \cdot (s^{1/2} - 1,61)}{0,091} \text{ fm}^2, \qquad 1,7 \geq s^{1/2} \geq 1,61 \text{ GeV}, \tag{34}$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,0045}{s^{1/2} - 1,6} \text{ fm}^2, \qquad s^{1/2} \geq 1,7 \text{ GeV}, \tag{35}$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = 0 \text{ fm}^2, \qquad s^{1/2} \leq 1,61 \text{ GeV}. \tag{36}$$

Řídící rovnice závislá na teplotě - konstantní teplota

- 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty T = 165 MeV, T = 145 MeV a T = 125 MeV pro 15 pionů a 10 neutronů.